

## **BLOQUE 3: INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

### **I. ORIENTACIONES METODOLÓGICAS**

Es evidente la dificultad que presenta el manejo experimental del campo gravitatorio, cuyo orden de magnitud sólo es fácilmente manifestable cuando, al menos, uno de los cuerpos posee una gran masa. Esta circunstancia nos obliga a recurrir a ejemplos de situaciones imaginadas que, por otra parte, son muy frecuentemente utilizadas, en la actualidad, por nuestro alumnos. De todas formas, el concepto de campo de la física moderna se podrá consolidar cuando, más adelante, se trate el de campo eléctrico, con una didáctica paralela al de campo gravitatorio, pero con la aportación de experiencias de fácil desarrollo en la clase o en el laboratorio.

### **II. COMPROBACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS**

#### **b) Conocimientos procedentes de las construcciones espontáneas:**

##### **1. Solución a los ítems sobre preconcepciones que aparecen en el libro.**

La opción correcta es la a

##### **2. Otros ítems diferentes de los que se dispone de resultados obtenidos en nuestras investigaciones.**

La persistencia de preconcepciones erróneas en los alumnos en esta rama de la física, ha sido ampliamente probada por numerosos autores (Viennot,L. y Saltiele,E. 1985; Halloun,I.A. y Hestenes,D. 1985; Pozo, J.J. 1987; Carrascosa 1987; Calvo,J.L. y col. 1992; Driver,R. 1986; Acevedo,J.A. y col. 1989) entre otros.

Estos trabajos indican que es frecuente:

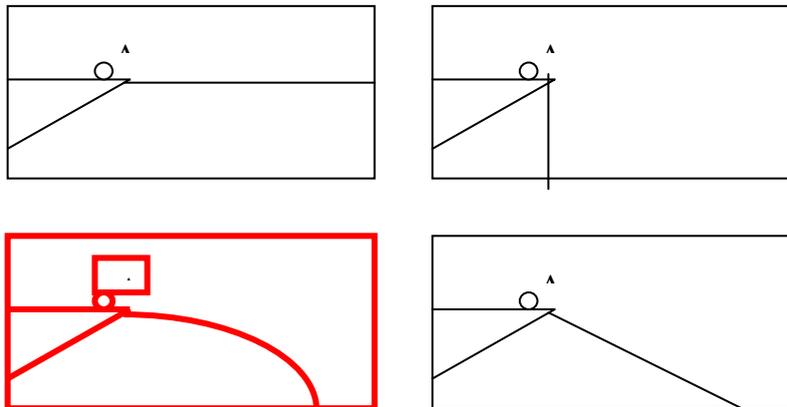
- Que los sujetos conciban el peso como una propiedad intrínseca de los cuerpos.
- El tercer principio se concibe como una ley causal ,es decir, cada movimiento lleva implícito una causa y si no la hay se inventa.
- Las teorías espontáneas sobre interacciones por contacto son elaboradas por los sujetos mediante ideas intuitivas fundamentales en la transmisión inmediata (o mediata) de la acción de un cuerpo sobre otro.
- En cambio, en las acciones a distancia, las explicaciones causales elaboradas a través de estas concepciones implícitas no pueden sustentarse en la acción de un cuerpo sobre otro.
- La inercia se concibe como algo inmanente al cuerpo.
- La fuerza se concibe como algo que se transfiere de un cuerpo a otro.

### 1. Ausencia de gravedad en el vacío

1.1. Una bola de acero y una pluma de ave se encuentran en el interior de una urna en la que se ha hecho el vacío. Por lo tanto:

- A) La bola de acero y la pluma no pesan
- B) La bola de acero sigue pesando igual, pero la pluma no pesa
- C) **La bola y la pluma siguen pesando igual**
- D) No lo sé

1.2.- En un laboratorio de Física, se ha construido una caja hermética de la cual se extrajo totalmente el aire, quedando el vacío en su interior. Mediante un dispositivo se lanza horizontalmente la bolita A. ¿Cuál de las siguientes trayectorias seguirá la bolita una vez lanzada.



d)  
Justifica tu respuesta

### 2 Acciones mutuas

2.1. La figura muestra un paracaidista descendiendo sobre la superficie de la Tierra

- a) La fuerza que hace la Tierra sobre el paracaidista es mayor que la que el paracaidista hace sobre la Tierra.
- b) La fuerza que hace la Tierra sobre el paracaidista es menor que la que hace el paracaidista sobre la Tierra.
- c) **Las dos fuerzas son iguales**
- d) El paracaidista no hace fuerza sobre la Tierra.

El distractor más elegido por los alumnos es el a: el cuerpo de más masa realiza más fuerza. También se advierte entre los comentarios de los alumnos interpretaciones como que el peso es una propiedad intrínseca del cuerpo. El tercer principio es aludido pero se concibe como una ley causal, es decir, para explicar el movimiento de uno de los cuerpos, y no como principio legal en donde no hay causa-efecto.

2.2. Si una persona pesa 800 N significa que la Tierra atrae a la persona con una fuerza de 800 N y la persona

- A) **A la Tierra con la misma fuerza**
- B) A la Tierra con una fuerza mucho menor
- C) No atrae a la Tierra

### 3. El peso como propiedad de los cuerpos

3.1. El peso de una persona se debe solamente

- A) A su propia masa
- B) A lo grande o pequeño que sea
- C) A los cuerpos que le rodean
- D) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta**

3.2. El peso de un cuerpo en esta habitación es 100 N. El mismo cuerpo en la superficie del gran planeta Júpiter pesará

- A) Más**
- B) Menos
- C) Igual
- D) No losé

4.- Un astronauta viaja en un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra.

- a) El astronauta no pesa porque se encuentra en un estado de ingravidez dada la lejanía a la Tierra.
- b) El astronauta no pesa porque se encuentra en un estado de ingravidez por viajar por el vacío.
- c) Ni a) ni b) son correctas, la respuesta correcta es .el peso proporciona la fuerza centrípeta.**
- d) No lo sé.

## III. ACTIVIDADES DEL EPÍTOME

### 1ª ACTIVIDAD

Poner de manifiesto la atracción gravitatoria terrestre sobre cualquier objeto que se tenga a mano. Extrapolar esta atracción entre dos cuerpos cualesquiera, aunque éstos sean pequeños y sus acciones no sean visibles. Proponer el caso de un satélite artificial en una órbita de 30000 Km (por tanto, en el vacío).

#### Contenido de planteamiento

- *En un punto del espacio del aula, aunque allí no situemos ningún cuerpo, ¿existirá también el campo gravitatorio terrestre? ¿Y en los puntos de la órbita del satélite artificial?*

### 2ª ACTIVIDAD

Hay que dirigir la reflexión a construir la idea de que el campo gravitatorio es una propiedad existente en cada punto del espacio (aunque allí exista el vacío), originada por la masa creadora del campo, en este caso, la Tierra.

#### Contenido de planteamiento

- *¿Es igual la intensidad con la que esta propiedad se manifiesta en cada punto? (Se ha introducido intencionadamente la palabra "intensidad").*

Se pueden aportar situaciones claras en las que se compare el campo en un punto de la propia aula con uno de la órbita del satélite.

- *¿Cómo definir el valor de esa intensidad?*

Los alumnos deben dar opiniones que el profesor irá criticando, intentando dirigir la definición a  $F/m$ , incluso aunque no se llegue a ella.

- *¿De qué dependerá esa intensidad?*

Es fácil que los alumnos obtengan respuestas acertadas por simple observación; asimismo, también debe sugerirse qué ocurrirá si el medio cambia.

Advertencia: los fenómenos de fuerzas entre cargas deben ser considerados como resultado de la acción del *campo* en cada punto sobre la carga allí colocada; es decir, se da como ley experimental  $g=GM/r^2$  y de allí se deduce  $F=GMm/r^2$  (no importa que pueda aclararse que, históricamente, fue al contrario: incluso, dentro del nivel de elaboración correspondiente, esta circunstancia proporciona una magnífica ocasión de explicar cómo la ciencia fue gestando el concepto de *campo*).

### 3ª ACTIVIDAD

Se retoma nuevamente la experiencia "mental" del satélite en órbita terrestre y se hace también extensiva a las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

#### Contenido de planteamiento

- *¿Qué le ocurriría al satélite del que hablábamos antes si, de pronto, pudiera desaparecer la Tierra? ¿Y, de la misma manera, a los planetas si desapareciera el Sol?*

Se trata de que los alumnos entiendan que la fuerza asociada al movimiento de estos cuerpos es la producida por el campo gravitatorio del espacio en donde se encuentran.

- *Todos sabemos que cuanto con más velocidad lancemos una piedra, mayor altura alcanzará, ¿podría llegar un momento en el que la piedra no volviera a caer? ; si la masa de la piedra fuera mayor, ¿ la velocidad tendría que ser también mayor?, ¿ costaría más trabajo?*

Se trata del problema de cálculo de la "velocidad de escape" que después será resuelto, pero es interesante que los alumnos, desde un principio, se planteen este tipo de situaciones que los vayan adentrando en un contexto de reflexión adecuada.

Independientemente de las respuestas que den, naturalmente se les indica que la solución se pospone hasta otro momento dentro del nivel de elaboración posterior.

- *Supongamos que deseamos lanzar al espacio otro satélite que describa una órbita de mayor radio, ¿ qué tendría que variar en las condiciones de lanzamiento respecto de las del primer satélite?*

Son suficientes respuestas no matizadas que hagan alusión a distintas velocidades o energías de lanzamiento.

#### 4ª ACTIVIDAD

Dejar caer un cuerpo o bien moverlo de un punto a otro en el aula. Proponer a los alumnos que reflexionen sobre el posible trabajo realizado en cada caso.

##### Contenido de planteamiento

- *El trabajo realizado, ¿de qué depende?*

La discusión puede moderarse fácilmente preguntando qué pasaría si se variara la masa de los cuerpos y la distancia recorrida.

- *¿El trabajo depende del camino seguido?*

No se pretende que de aquí surja la idea de campo conservativo, pero sí que quede planteada. No obstante, se puede hacer lo siguiente: subir un cuerpo por la vertical del punto A al B en el aula y luego volver a hacer la misma experiencia, pero rebasando B, para luego llegar a él bajándolo por la vertical; a continuación proponer: "supongamos que el trabajo en los dos casos fuera el mismo", ¿Sería esto posible? (tal vez los alumnos puedan llegar a deducir, con ayuda, que en un tramo se da un trabajo hecho en contra del campo y en el otro es realizado por él; en cualquier caso, estas reflexiones les introduce de la forma menos abstracta posible en esta difícil problemática.

- *Si se ha realizado un trabajo es que ha habido un cambio de energía, ¿de qué energía se trata?*

La idea de que todo trabajo supone una transformación de energía es, como se sabe, fundamental: es ésta una buena ocasión para, si es necesario, insistir en ella.

- *¿Es importante el tratamiento energético de estos fenómenos?*

Se pide que den razones. Sería bueno, en la medida de lo posible, introducir la idea de que la energía potencial tratada es un concepto asociado al de campo, imposible de aplicar al modelo newtoniano de acciones a distancia.

#### EVALUACION DEL EPITOME

Elaborar un mapa conceptual con las ideas tratadas, tomando como base el del texto y explicando razonadamente su construcción.

## IV. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PROPUESTOS QUE APARECEN EN EL LIBRO

### Página 66. Cuestión

La distancia media del planeta Marte al Sol es 228.000.000 km. Si el período de rotación de Marte es de 1,88 años y el de Júpiter 11,9 años, calcular la distancia Júpiter Sol. ¿Qué aproximaciones se han tenido que hacer para resolver el problema?

*Sol.:  $780,29 \cdot 10^9 m$ .*

### Página 69. Cuestión 2

La Luna en un año recorre 18 veces su órbita alrededor de la Tierra. Hallar la distancia entre los centros de estos dos astros, suponiendo que la órbita es circular. Datos:  $R_T = 6.370 \text{ km}$  y  $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$ .

*Sol.:  $3,15 \cdot 10^8 m$ .*

### Página 70. Cuestión

Completa poniendo en cada espacio en blanco la palabra que corresponda

Las \_\_\_\_\_ de campo son \_\_\_\_\_ en cada punto al vector \_\_\_\_\_ y además \_\_\_\_\_ se pueden \_\_\_\_\_.

*Sol.: Las **líneas** de campo son **tangentes** en cada punto al vector **campo** y además **nunca** se pueden **cortar**.*

### Página 72. Cuestión 1

¿En qué punto entre la Luna y la Tierra tendría que situarse un cuerpo para que fuese igualmente atraído por los dos astros? Datos:  $M_L = M_T/81$  y Distancia Tierra-Luna =  $60 R_T$ .

*Sol.: a  $54 R_T$  de la Tierra.*

### Página 72. Cuestión 2

En la Tierra se suspende un cuerpo de un dinamómetro, marcando éste 120 Newton. Ese mismo cuerpo colocado en el platillo de una balanza y equilibrada con pesas en el otro necesita 12 kg. Realizada la misma experiencia en la Luna, en la que  $g_T = 6 g_L$ , contesta razonadamente las siguientes preguntas: a) ¿Cuánto señala el dinamómetro?; b) ¿Cuántas pesas habría que colocar en el segundo plato de la balanza para equilibrarla?

*Sol.: a) 20 N y b) 12 Kg*

### Página 72. Cuestión 3

Halla la intensidad del campo gravitatorio en un punto por encima de la superficie terrestre que se encuentra a una distancia de la superficie de 3 veces el radio de la Tierra.

*Sol.:  $g_0/16$ .*

### Página 75. Cuestión

Completa poniendo una palabra en cada uno de los espacios en blanco: Si una fuerza ..... desplaza su punto de aplicación entre dos puntos A y B, el trabajo es el ..... aunque lo haga por caminos .....

*Sol.: Si una fuerza **conservativa** desplaza su punto de aplicación entre dos puntos A y B, el trabajo es el **mismo** aunque lo haga por caminos **diferentes**.*

### **Página 77. Cuestión 1.**

Una masa de 5 kg se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular el potencial gravitatorio en el punto (3,4), estando los ejes graduados en metros.

*Sol.:  $-6,67 \cdot 10^{-11} \text{ J/kg}$ .*

### **Página 77. Cuestión 2**

Contesta Verdadero o Falso, razonando la respuesta: El trabajo que se realiza al trasladar una masa entre dos puntos A y B de una superficie equipotencial es cero.

*Sol.: Verdadero :  $W_A^B = m(V_A - V_B) = m \cdot 0 = 0$*

### **Página 77. Cuestión 3**

Completa poniendo una palabra en cada uno de los espacios en blanco: El ..... que se realiza cuando se traslada una masa entre dos puntos A y B de una ..... equipotencial vale .....

*Sol.: El **trabajo** que se realiza cuando se traslada una masa entre dos puntos A y B de una **superficie** equipotencial vale **cero**.*

### **Página 78. Cuestión**

Completa poniendo una palabra en cada uno de los espacios en blanco: La energía ..... de una masa m en un punto del campo ..... terrestre es igual al trabajo que hay que realizar para ..... la masa desde ese ..... al ..... El trabajo lo realiza un .....

*Sol.: La energía **potencial** de una masa m en un punto del campo **gravitatorio** terrestre es igual al trabajo que hay que realizar para **trasladar** la masa desde ese **punto** al **infinito**. El trabajo lo realiza un **agente externo**.*

### **Página 79. Cuestión**

Explicar los términos: Satélite, estrella, cúmulos estelares, galaxias, planeta, Sol, asteroide, etc.

*Sol.:*

*Satélite: objeto que gira alrededor de un planeta. Puede ser un satélite natural o artificial.*

*Estrella: cuerpo celeste dotado de luz propia.*

*Cúmulos estelares: agrupación de estrellas.*

*Galaxias: agrupación de estrellas de estructura análoga.*

*Planeta: cuerpo celeste, sin luz propia, que gira alrededor del Sol y refleja la luz que de él recibe.*

*Sol: astro central de nuestro sistema planetario.*

*Asteroide: planeta pequeño.*

**Página 82. Cuestión 1**

¿Qué trabajo será necesario realizar para elevar un cuerpo de 25 kg desde la superficie de la tierra hasta una altura de 1000 km? Si desde esa altura se deja caer el cuerpo, ¿cuál será la velocidad al chocar con el suelo?

*Sol.: a)  $-21,6 \cdot 10^7$  J; b)  $4,15 \cdot 10^3$  m/s.*

**Página 82. Cuestión 2**

Calcular la altura que hay que subir por encima de la superficie terrestre para que la aceleración de la gravedad sea de  $7 \text{ m/s}^2$ .

*Sol.: 1167,1 km*

**Página 82. Cuestión 3**

Un astronauta de 70 kg aterriza en el planeta Venus y observa que allí pesa 600 newton. Si el diámetro de Venus es idéntico al de la Tierra, calcular la masa de Venus.  $M_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg.

*Sol.:  $5,14 \cdot 10^{24}$  kg.*

**Página 83. Actividad 1**

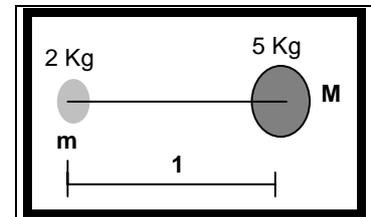
Calcula el potencial gravitatorio que crea la Tierra, considerada como una masa puntual en los siguientes puntos: a) A una distancia de 6.400 km ; b) En el punto en que se anulan los campos gravitatorios creados por la Tierra y la Luna sabiendo que la masa de la Luna es la ochentaava parte de la de la Tierra.

Datos: Masa de la Tierra  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg. Distancia Tierra-Luna: 380.000 km.

*Sol.: a)  $-6,23 \cdot 10^7$  J/kg. b)  $-11,66 \cdot 10^5$  J/kg.*

**Página 83. Actividad 2**

Dos masas de 2 y 5 kg se encuentran separadas una distancia de 1 m. ¿En qué punto a lo largo de la línea que une las masas se anula el potencial gravitatorio? ¿Y el campo?



*Sol.: a)  $-2/3$  m. b) 0,38 m y  $-1,72$  m. (no es solución física)*

**Página 83. Actividad 3**

Encuentra hasta qué altura sobre la superficie terrestre habrá que elevarse para reducir el peso en un 35 %. Radio de la Tierra 6.500 km.

*Sol.: 1.625 km.*

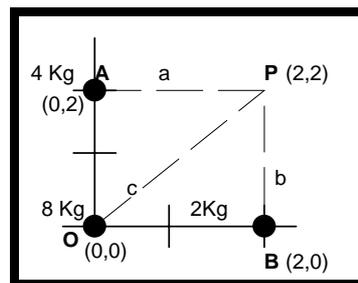
**Página 83. Actividad 4**

Un astronauta tiene un peso en la Tierra de 800 N. Cuando aterriza en la Luna observa que pesa 160 N. Hallar la gravedad de la Luna.

*Sol.:  $g/5$ .*

**Página 83. Actividad 5**

Tres masas de 2, 8 y 4 kg se encuentran en los puntos B(2,0), O(0,0) y A(0,2) respectivamente. a) Hallar el campo gravitatorio en el punto (2,2). b) ¿Qué trabajo habría que realizar para llevar una masa de 5 kg desde el infinito hasta el punto (2, 2)?



Sol.: a)  $-10^{-11} (11,33\vec{i} + 7,92\vec{j}) N / kg$  . b)  $-1,94 \cdot 10^{-9}$  Julios (realiza el campo ).

**Página 83. Actividad 6**

Hallar la velocidad de escape para un proyectil en Marte sabiendo que la gravedad en su superficie es 0,38 veces la de la Tierra. Radio de Marte = 3.200 km.

Sol.:  $4,88 \cdot 10^3$  m/s.

**Página 83. Actividad 7**

La Luna dista de la Tierra 380.000 km y su periodo de revolución es de 27 días aproximadamente. ¿Cuál sería su periodo de revolución si la distancia se redujese a la mitad?

Sol.: 9,54 días.

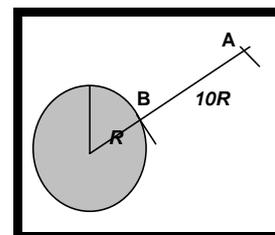
**Página 83. Actividad 8**

Calcular el intensidad del campo gravitatorio en Marte sabiendo que el radio de Marte es la mitad que el de la Tierra y que su masa es la centésima parte de la de la Tierra. Gravedad en la Tierra  $9,8$  m/s<sup>2</sup>.

Sol.:  $g/25$ .

**Página 83. Actividad 9**

Un cuerpo se encuentra a una distancia de la Tierra igual a 5 veces el diámetro de ésta. Hallar la velocidad con la que llegará a la superficie de la Tierra. Masa de la Tierra  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg, Radio de la Tierra 6400 km.



Sol: 3219m/s.

**Página 84. Actividad 10**

Hallar la energía potencial de un sistema formado por 3 masas de valores 1, 2, 3 kg situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 1 metro de lado.

Solución:  $-73,37 \cdot 10^{-11}$  J.

**Página 84. Actividad 11**

Sol.:

|    |    |
|----|----|
| a) | 2  |
| b) | 1  |
| c) | 4  |
| d) | 3  |
| e) | 6  |
| f) | 5  |
| g) | 7  |
| h) | 10 |
| i) | 8  |
| j) | 9  |
| k) | 11 |

**V. UN EJEMPLO DE PROBLEMA ABIERTO**

En la página WEB de la estación MIR (<http://www.maximov.com/Mir/homepage.asp>) podemos leer que en los 14 años de órbita, a 390 km de la Tierra, (fue lanzada el 19 febrero de 1986 y los datos son de febrero del 2000), la estación ha realizado más de 79300 vueltas sobre nuestro planeta.

De los datos anteriores: ¿sabrías calcular, a partir de la distancia a que se encuentra la estación MIR, la velocidad con que se mueve?

¿Concuerda tu resultado con el número de vueltas dadas en sus 14 años de vida?

¿Se verifica para la estación MIR la tercera ley de Kepler?

Sol.:

a) *Análisis verbal*

- Los cuerpos en movimiento circular con velocidad angular constante, poseen aceleración centrípeta ( $a_c$ ), dirigida radialmente hacia el centro de la circunferencia alrededor del cual se mueven. ( $a_c = v^2/r$ ) (con  $v$ = velocidad y  $r$ = radio del mvto. circular)
- Según la segunda ley de Newton ( $F=m\cdot a$ ), debe existir una fuerza, dirigida igualmente hacia el centro de la circunferencia, causante de la aceleración anterior.
- En el problema que nos ocupa, la fuerza que existe entre la estación MIR (de masa  $m$ ) y el centro de su círculo (el centro de la Tierra, de masa  $M_T$ ), es la fuerza de gravitación universal:  $FG=G\cdot M_T\cdot m/r^2$ , donde  $r$  es la distancia de la estación MIR respecto al centro de la Tierra.
- Una vez calculada la velocidad, a partir de las expresiones previas, podremos determinar el número de órbitas alrededor de la Tierra que la estación da por año y, con ello, verificar el número de órbitas efectuadas desde su lanzamiento.
- La tercera Ley de Kepler, para órbitas circulares, como la de la Luna y la de la estación MIR, implicaría que el cociente entre el periodo al cuadrado y el radio al cubo sería constante para ambos satélites:  $T^2/R^3 = Tm^2/rm^3$ .

b) *Tabla de datos y resolución*

- Masa de la Tierra ( $M_T$ ),  $M_T = 5,98\cdot 10^{24}$  kg.
- Radio de la Tierra ( $R_T$ ),  $R_T = 6370$  km =  $6,37\cdot 10^6$  m.

- Constante de gravitación universal ( $G$ ),  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .
- Distancia media Tierra/Luna ( $RL$ ),  $RL = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ .
- Periodo de la Luna ( $TL$ ),  $TL = 27,32 \text{ días} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$ .

Como dijimos en nuestro análisis verbal, igualamos la fuerza centrípeta y la gravitatoria y así tenemos:

$$G \cdot M_T \cdot m_m / r_m^2 = m_m \cdot v^2 / r_m$$

Con  $r_m$  el radio, respecto al centro de la Tierra, al que se encuentra orbitando la estación MIR, que será suma del radio de la Tierra, más la distancia de la estación a la superficie de ésta. Así,  $r_m = 6370 \text{ km} + 390 \text{ km} = 6760 \text{ km} = 6,76 \cdot 10^6 \text{ m}$

Despejando la velocidad de la ecuación anterior, tenemos que:

$$v_m^2 = G \cdot M_T / r_m$$

expresión en la que podemos observar que la velocidad de rotación de la estación MIR no depende su masa.

Operando, obtenemos:

$$v_m^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} / 6,76 \cdot 10^6 \Rightarrow v_m = 7,68 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$

Para calcular el número de órbitas (vueltas) alrededor de la Tierra, que la estación realiza por año, usamos la expresión de la longitud de la circunferencia y la velocidad expresada en unidades de metros por año

$$\text{Longitud de una órbita} = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 6,76 \cdot 10^6 \text{ m} = 4,25 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$v_m = 7,68 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot (3600 \cdot 24 \cdot 365,25) \text{ s/año} = 2,42 \cdot 10^{11} \text{ m/año}$$

luego, las órbitas completadas en un año (frecuencia expresada en órbitas/año) serán  $f_m$  (frecuencia) =  $2,42 \cdot 10^{11} \text{ m/año} \cdot 1 \text{ órbita} / 4,25 \cdot 10^7 \text{ m} = 5,69 \cdot 10^3 \text{ órbitas/año}$

Como en 14 años, la estación MIR habrá recorrido catorce veces esta cantidad, obtenemos 79660 órbitas.

Respecto a la tercera ley de Kepler, transformamos la frecuencia anterior en período en segundos obteniendo:  $T_m = 1/f_m = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ años} = 5,55 \cdot 10^3 \text{ s}$

$$\text{Para la luna } T_L^2/R_L^3 = (2,36 \cdot 10^6)^2 / (3,84 \cdot 10^8)^3 = 9,83 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

$$\text{Para la MIR } T_m^2/r_m^3 = (5,55 \cdot 10^3)^2 / (6,76 \cdot 10^6)^3 = 9,97 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

### c) Interpretación de resultados y comentarios finales

Es interesante reparar en que, respecto a la velocidad, si expresamos la velocidad en órbitas/día, encontramos que la estación MIR realiza más de 15 órbitas diarias alrededor de la Tierra (tarda por tanto poco más de una hora en dar una vuelta a nuestro inmenso planeta). En las noches estrelladas, en el cielo podemos observar satélites que pasan a velocidades comparables a la de la estación MIR (e incluso, si miramos en dirección norte, podremos ver la propia estación, con un poco de suerte).

Respecto al número de órbitas realizadas en los 14 años, el valor obtenido concuerda razonablemente con el dato que se nos da en INTERNET

En lo que se refiere a la tercera Ley de Kepler, observamos su cumplimiento, a través de la constancia en el cociente entre periodo al cuadrado y el radio al cubo, para ambos satélites (Luna y estación MIR). La diferencia entre los valores obtenidos es menor del 2% del valor de cualquiera de ellas.

Es de reseñar, que en la resolución del problema, en ningún momento se han mencionado la existencia de aceleración o fuerza centrífuga. Es importante darse cuenta que ello es debido a que esta fuerza es ficticia y surge de considerar sistemas de referencia no inerciales. En nuestro caso, un sistema de referencia situado en la Tierra, que podemos considerar inercial, las únicas fuerzas a tener en cuenta en el problema son las que surgen de la interacción entre los cuerpos, esto es, la fuerza gravitatoria, que será la causante de la fuerza radial o centrípeta.

## VI. TEST DE CONOCIMIENTOS Y TEST DE APLICACION

### Página 84. Test de conocimientos

1. Diga si es Verdadero o Falso razonando la respuesta: “El vector momento lineal y el vector momento angular de una partícula que gira son paralelos”.

*Sol.: Falso, ambos vectores son perpendiculares, porque  $p$  está en el plano de la circunferencia (es tangente a ella) y  $L$  en el plano perpendicular a la misma (perpendicular al plano formado por  $r$  y  $p$ ).*

2. ¿Es absolutamente necesario que la magnitud característica de un campo varíe de un punto a otro?

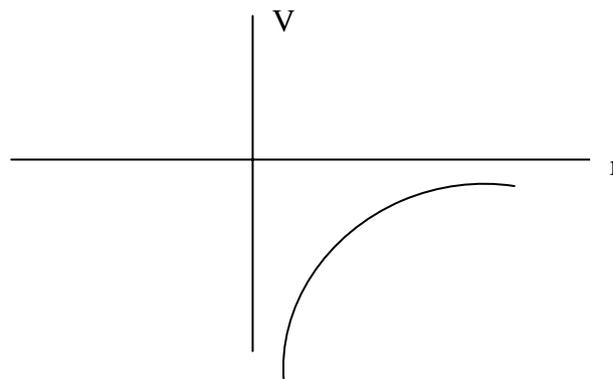
*Sol.: No, por ejemplo, en un campo vectorial uniforme, el vector campo posee un valor constante en todos los puntos. Lo mismo puede decirse de campos escalares (por ejemplo, en líneas, superficies o volúmenes equipotenciales).*

3. Señala al menos tres propiedades de las líneas de campo.

*Sol.: - en todos sus puntos el vector campo es tangente a la línea de campo.  
- dos líneas de campo no pueden cortarse.  
- En los campos conservativos son líneas abiertas.*

4. Indicar cómo varía el potencial gravitatorio creado por una masa puntual en función de la distancia.

*Sol.:  $V = -k/r$*



5. ¿Puede ser nula la intensidad del campo en un punto y no serlo el potencial? ¿Por qué?

*Sol.: Sí, como  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ ; si  $V = \text{cte}$ , será  $\mathbf{E} = 0$  (por ejemplo, es lo que ocurre en el interior de una esfera cargada homogéneamente en su superficie).*

7. En todo campo conservativo se cumple que la circulación del vector campo:

- A lo largo de una línea cerrada es cero.
- Es constante.
- Es función del camino recorrido por el vector.
- Depende de que la línea sea recta o curva.
- Es mínima si la línea entre los dos puntos es recta.

*Solución: la opción correcta es la a*

8. En cierta revista se lee “sólo las fuerzas conservativas realizan trabajo”. ¿Verdadero o Falso? Razona la respuesta.

*Sol.: Falso, todas las fuerzas pueden realizar trabajo dado por  $W = \int_c \vec{F} d\vec{l}$*

9. Los campos conservativos se pueden describir por dos magnitudes escalares o por dos magnitudes vectoriales. ¿Cuáles son esas cuatro magnitudes en el caso del campo gravitatorio? Relación entre ellas.

*Sol.:  $F$ ,  $E$ ,  $E_p$  y  $V$ . Relación entre ellas  $F = -\text{grad } E_p$ ;  $E = -\text{grad } V$ ;  $E = F/q$ ;  $V = E_p/q$*

10. Deduce la relación que existe entre la velocidad de escape de una masa  $m$  que se encuentra en reposo a una distancia  $r$  del centro de la Tierra y la velocidad con la que se desplazaría  $m$  si fuera un satélite artificial en órbita circular a esa misma altura.

*Sol.:*

$$\text{En reposo : } -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0 \text{ (en el } \infty) \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$$\text{En órbita : } F_{\text{centr}} = F_{\text{gravit}} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_e}{v} = \sqrt{2}$$

11. Elige la contestación correcta: Para que al actuar una fuerza sobre un cuerpo de masa  $m$  no varíe la energía cinética del mismo, la fuerza ha de actuar:

- en la misma dirección y sentido del movimiento
- en sentido contrario
- siempre que actúe una fuerza la energía cinética cambia
- normal a la trayectoria.

*Sol.: la opción correcta es la d*

12. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?

- El trabajo realizado por las fuerzas conservativas aumenta la energía cinética.
- El trabajo realizado por las fuerzas conservativas aumenta la energía potencial.
- El trabajo realizado por las fuerzas conservativas aumenta la energía mecánica.

*Sol.: b), aunque debe estar claro que es el realizado POR y no EN CONTRA (que disminuiría la  $E_p$ )*

**Página 85. Test de aplicación**

1. Un planeta imaginario tiene un radio de 1.000 km y el valor de la intensidad del campo gravitatorio en su superficie es de 2,5 N/kg. Determinar: a) la energía potencial de un cuerpo de masa 100 kg situado en su superficie. b) Si ese cuerpo asciende 10 km por encima de la superficie ¿cuál es el valor de la nueva energía potencial? c) ¿Cuánto trabajo se ha realizado?

*Sol.: a)  $E_p = -2'5 \cdot 10^8 J$ ; b)  $E_p = -2'475 \cdot 10^8 J$ ; c)  $W = -2'5 \cdot 10^6 J$  en contra del campo.*

2. Una forma de perder peso consiste en elevarse por encima de la superficie de la Tierra. Determinar lo que pesa un astronauta de 100kg de masa en la Tierra cuando se eleva a una altura de  $2R_t$ . ¿Se encontraría el astronauta más delgado y estilizado?

*Sol.:  $P = 245 N$ , no cambia la masa gravitatoria.*

3. Cuatro masas de valores 1, 2, 3 y 4 kg se encuentran en los vértices de un cuadrado de 1 metro de lado. Hallar la intensidad del campo y el potencial gravitatorio en el centro del cuadrado.  $G = 6'7 \cdot 10^{-11} J$

*Sol.:  $E = 18'95 \cdot 10^{-11} N/kg$ , vectorialmente  $\mathbf{E} = 18'95 \cdot 10^{-11} \mathbf{j} N/kg$*

4. La masa de la Luna es  $6,7 \cdot 10^{22} kg$  y la distancia Tierra-Luna es de 380.000 km. Calcular a) ¿En qué punto se anula el campo gravitatorio?; b) ¿Cuál sería el peso de una masa  $m$  colocada en ese punto? La masa de la luna es 81 veces menor que la de la Tierra.  $R = 6400 km$

*Sol.: a)  $1'95 \cdot 10^7 m$ ; b)  $P = 0'11 P_0$*

5. Un satélite describe una órbita circular de  $2 \cdot 10^5 km$  de radio y período de 24 días alrededor de un planeta. Determinar la masa del planeta.  $G = 6'7 \cdot 10^{-11} J$

*Sol.:  $M = 21'4 \cdot 10^{23} kg$*

6. Una satélite de 10 toneladas se encuentra describiendo una órbita a 400 km por encima de la superficie de la Tierra. Calcular: a) Velocidad del satélite para girar en esa órbita; b) Energía del satélite en el lugar del lanzamiento.  $R = 6400 km$

*Sol.: a)  $v = 7'68 \cdot 10^3 m/s$  o  $27'6 \cdot 10^3 km/h$ ; b)  $E_p = -6'27 \cdot 10^{10} J$*

7. Hallar la fuerza gravitatoria entre: a) 1 protón y un electrón; b) 2 protones; c) 2 electrones. Masa del protón:  $1,67 \cdot 10^{-27} kg$ . Masa del electrón:  $9,1 \cdot 10^{-31} kg$ . Distancia entre las partículas 1mm.

*Sol.: a)  $f = 101'8 \cdot 10^{-63} N$ ; b)  $F = 481 \cdot 10^{-59} N$ ; c)  $F = 554 \cdot 10^{-67} N$*

## VII. ACTIVIDADES SOBRE LECTURAS COMPLEMENTARIAS

### Los satélites meteorológicos

- 1) Dibujar un esquema que muestre la Tierra, el Sol y el plano de una órbita heliosíncrona de un satélite, en distintos momentos del año.
- 2) Dibujar un esquema que muestre la Tierra, una órbita geoestacionaria y una órbita heliosíncrona.
- 3) Comentar alguna ventaja de las órbitas heliosíncronas sobre las geoestacionarias y viceversa.

### Influencia de las aportaciones de Newton en el desarrollo de la ciencia

El físico y matemático inglés Isaac Newton nació en Woolsthorpe, el 25 de diciembre de 1642, precisamente el mismo año de la muerte de Galileo, y murió en Londres el 20 de marzo de 1727. Su tumba está en la abadía de Westminster, allí donde tienen su último reposo casi todos los grandes de Inglaterra. A su muerte Newton gozaba de una gran reputación.

Su influencia en la posterioridad ha sido y es inmensa, ya que él sentó las bases de la mecánica y de la gravitación, imprescindible para la comprensión científica del mundo que nos rodea. Sin embargo el alcance y la solidez de los conceptos que emanan de la obra de Newton han ido variando con el tiempo. Los éxitos iniciales, parecían indicar que la mecánica y sus aplicaciones eran las leyes básicas de la naturaleza. Poco a poco la obra de Newton fue difuminándose: La acción a distancia, la idea estrictamente corpuscular de la luz, los conceptos de tiempo y espacio absolutos, de continuidad y determinismo, su capacidad de predecir.. ...

La cuestión general de la gravitación era un problema científico de difícil solución para la época. Fue Edmmond Halley su amigo y astrónomo, famoso por el cometa que lleva su nombre, quien desesperado por encontrar una solución matemática al problema fue a ver a Newton, en el Trinity College, de Cambridge y encontró que éste ya lo había resuelto.

Halley convenció y ayudó a Newton a publicar sus obras. Quedó tan impresionado de la Teoría de la Gravitación, que la aplicó al estudio de su cometa que apareció entre 1681 y 1682, El cálculo aproximado de su órbita le permitió predecir cuando volvería a aparecer en 1758 , lo cual supuso un gran éxito de la teoría newtoniana.

La teoría de Newton comenzó su expansión por todo el mundo, si bien tuvo serias dificultades para abrirse paso en Francia, debido al dominio que ejercía Descartes sobre los ambientes científicos. Fue Voltaire quien más contribuyó a impulsar esta teoría. Fruto de esta influencia Lagrange con su "Mecanique Analytique" y Laplace con su "Mecanique Celeste", sobre todo este último, tuvo una marcada influencia newtoniana y destacó por su contenido determinista del Universo

Herschelen 1781 descubrió el planeta Urano, si bien al aplicar la teoría de Newton se observaban serias discrepancias sobre la órbita del planeta. Fueron Adams y Le Verrier quienes llegaron a la conclusión que las anomalías en la órbita obedecían a la presencia de otro planeta que perturbaba la órbita de Urano. Fue Le Verrier quien dedujo la posición del nuevo planeta y se lo comunicó a Galle del observatorio de Berlín quien localizó el nuevo planeta al que llamó Neptuno.

El prestigio de Newton iba en aumento, éste defendía la naturaleza corpuscular de la luz pero fue Young 1801, quien realizó una experiencia que ponía de manifiesto la naturaleza ondulatorio de la misma frente a la interpretación sostenida por Newton.

En 1864 Maxwell daba a conocer su Teoría del Electromagnetismo que indicaba que la luz debería ser una onda electromagnética. El concepto de campo que propugnaba la Teoría de Maxwell se impone en la física frente a la acción instantánea a distancia que defendía Newton en su Ley de Gravitación Universal.

Otro punto importante de fricción de la teoría newtoniana es que éste postuló un tiempo y un espacio absoluto frente a las leyes del electromagnetismo que condujeron a Einstein en 1905 a defender que tanto el espacio como el tiempo no son absoluto, sino que dependían del estado de movimiento del observador. En 1915 propone la Teoría General de la Relatividad, donde si bien concuerda matemáticamente (aunque no conceptualmente) con la teoría de Newton (es una aproximación satisfactoria) para valores débiles del campo gravitatorio, pero conduce a resultados diferentes para valores grandes.

En 1926 Heisenberg formuló una de las bases de la mecánica cuántica, el Principio de Indeterminación. En el cual se indica que para poder observar algo hay que perturbarle en cierto grado, es imposible efectuar una medida sin interaccionar con el sistema a medir. En el mundo macroscópico esta perturbación es despreciable, mientras que en el microscópico no ocurre así.

Los estudios posteriores de mecánica cuántica impiden aplicar la mecánica de Newton a escala atómica.

En el año 1965 con el hallazgo del caos determinista puso de manifiesto que el disponer de unas ecuaciones perfectamente determinista no es suficiente para poder predecir a más largo plazo.

A lo largo del proceso histórico observamos como la teoría de Newton alcanzó su cuota más elevada de predicción con el descubrimiento de Neptuno y como después las distintas teorías han ido abandonando el determinismo newtoniano.

#### Bibliografía:

Horst B. Feller. Espacio, tiempo, materia, infinito. Ed Gredos, 1968.

Stephen W. Hawking. Historia del Tiempo. Ed. Crítica, 1988.

Manuel F. E. A Portrait of Isaac Newton. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1968.

Ciencia y Tecnología, La Vanguardia. Diciembre 1992.

#### **El entorno de Isaac Newton.**

El físico y matemático inglés Isaac Newton nació en Woolsthorpe, una aldea del fértil condado de Lincolnshire, el 25 de diciembre de 1642, precisamente el mismo año de la muerte de Galileo, y murió en Londres el 20 de marzo de 1727. El padre de Newton, llamado también Isaac, era un pequeño terrateniente analfabeto que cultivaba 120 acres, lo cual le permitía disfrutar de una posición moderadamente rica. La familia de Newton había subido social y económicamente durante varias generaciones.

Cuando el padre de Newton se casó con su madre, el matrimonio supuso otro paso más en su ascenso social. La madre de Newton, Hannah Ayscough Newton sabía leer y escribir, lo que era inusual en aquellos tiempos. Sin embargo no existe indicios de genio latente en la familia de los Newton.

Newton era un niño muy endeble. Pronto se vio claro que no era apto para la agricultura, prefiriendo dedicar su tiempo a la lectura de numerosos libros. Fue un hombre solitario, casi siempre vivía muy retirado y se dice que fue siempre amable y modesto. Nunca se casó y su

juventud transcurrió privado de su padre, que había muerto antes de que naciese el joven Isaac, el día de Navidad de 1642, y de su madre, que volvió a casarse a los tres años de la muerte de su padre.

Su madre se casó en segundas nupcias con Barnabas Smith, un anciano y rico párroco de una localidad cercana, poco apreciado por Newton, pero que le dejaría una sustanciosa herencia. Parte del acuerdo del matrimonio fue que el joven Isaac fuese dejado al cuidado de su abuela Ayscough en Woolsthorpe mientras que su madre y su padrastro vivían a unas 10 millas. No existe constancia del afecto entre Isaac y su abuela, y algunos historiadores sospechan que no existió. Cuando tenía diez años, su padrastro murió y su madre volvió a Woolsthorpe a tomar a Isaac a su cuidado. Muchos biógrafos de Newton han especulado sobre el daño psicológico causado en el muchacho ya huérfano por la ausencia de su madre durante esos años cruciales para su formación. Él mismo admitía que de joven era un chico malhumorado y obstinado, y de acuerdo a la mayor parte de las referencias que se tienen se convirtió en un adulto introspectivo y a veces petulante.

Su madre decidió enviarle a la escuela primaria de Grantham Grammar School y después de una vida colegial bastante irregular, en el verano de 1661, ingresó en Trinity College de la Universidad de Cambridge, donde estudió matemáticas. La estructura social de Cambridge reflejaba la sociedad inglesa de la época. Cada estudiante era clasificado -como pensionista o como becario. Un pensionista gozaba de ciertos privilegios y mejores condiciones de vida, mientras que un becario realizaba labores domésticas, frecuentemente como asistente de un pensionista. Newton fue un becario, a pesar de que su madre, le permitió asistir al colegio de mala gana, podría haber pagado con facilidad el coste de sus estudios como pensionista.

Newton recibió su título de bachiller en 1665. Después de una interrupción de casi dos años provocada por una epidemia de peste, tiempo que consagró a estudiar los problemas planetarios, volvió al Trinity College, donde le nombraron pensionista en 1667. Durante su estancia pasó por todos los estamentos, primero fue alumno de Isaac Barrow, más tarde ayudante y luego sucesor en la cátedra de Matemáticas, recibiendo el título de Profesor de Matemáticas en 1669.

Debido a su carácter introvertido quedaba satisfecho con guardar sus descubrimientos para sí mismo, no lanzándose a publicarlos como sus compañeros científicos contemporáneos, M' siquiera de comunicarlos a sus asociados cuando los había alcanzado. De acuerdo con ello se ha dicho que cada descubrimiento de Newton tenía dos fases: Newton realizaba el descubrimiento y luego los demás habían de averiguar lo que él había hecho. Su biógrafo Lord Keynes resaltaba, el poder de Newton de mantener continuamente en su mente un problema mental, durante horas, días y semanas, hasta que le entregaba sus secretos. Desde su juventud, Newton dedicó sólo una pequeña fracción de su vida intelectual creativa a los objetivos científicos ortodoxos: matemáticas puras y aplicadas, astronomía y mecánica celeste, dinámica, física experimental y óptica. Durante todos estos años fue además un ardiente estudiante de teología, leyendo y tomando notas, y escribiendo tratados incluso textos enteros sobre temas religiosos. Algunos de ellos se ocupaban de cuestiones fundamentales de la interpretación de la doctrina teológica, otros sobre el significado de libros proféticos de la Biblia y finalmente otros que pretendían aclarar el problema de la lúston'a de la Iglesia. También desarrolló un sistema nuevo de cronología mundial, en parte basado en la Astronomía, que demostró ser de poco valor. Y su tema principal de estudio fue la alquimia, leyendo ampliamente, copiando secciones enteros de textos, haciendo experimentos, aunque no sabemos a todo lo que le condujo.

Newton montó un laboratorio en el jardín situado detrás de sus habitaciones, entre la Great Gate y la capilla del Trinity College; aquí realizó sin duda sus experimentos sobre óptica y otras cuestiones físicas, pero también estudió la química, según afirma su familiar y ayudante, Humprey Newton, interesándose fundamentalmente por los metales, las causas de la afinidad

química y la estructura de la mecánica. No escribió ningún libro sobre química, aunque tal vez la dedicara más tiempo que a la física.

### Bibliografía

- Westfall R. *Never at Rest*. Cambridge University Press, Nueva York, 1980.  
 Manuel F. E. *A Portrait of Isaac Newton*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1968.  
 Gettys W.E., Keller F.J. Malcom J.S. *Física Clásica v Moderna*. Ed. McGraw-Hill, Madrid 1996.  
 L.W. Hull. *Historia y Filosofía de la ciencia*. Ed. Ariel, 1981  
 Horst B. Hiller. *Espacio, tiempo, materia, infinito*. Ed. Gredos, 1968.  
*Historia de la Humanidad*, Ed. Planeta, T. 6. Unesco 1963  
 W.C. Dampier. *Historia de la Ciencia*. Ed. Tecnos 1972.  
 Stephen W. Hawking. *Historia del Tiempo*. Ed. Crítica 1988.  
 D. Papp. *Historia de la Física*, Madrid- Buenos Aires, Espasa Calpe, 1945.  
 Isaac Newton, *Opticks*. Prólogo de Albert Einstein. introducción: Sir Edmund Whittaker, prefacio: I. Bernard Cohen e índice analítico: Duane H. D. Roller, Nueva York, Dover Publications, 1952.

### ACTIVIDADES SOBRE LECTURAS COMPLEMENTARIAS

1.- La “influencia de Newton en la posteridad ha sido y es inmensa”. ¿en qué parte de la física te parece más decisiva esta influencia?

“...sentó las bases de la mecánica y de la gravitación, imprescindible para la comprensión científica del mundo que nos rodea.”

(Sería conveniente aquí un breve comentario sobre la importancia y trascendencia de las leyes de la dinámica de Newton y de su teoría de la gravitación universal.)

2.- “...el alcance y la solidez de los conceptos que emanan de la obra de Newton han ido variando con el tiempo.” Explica la postura de Newton en algunas de las controversias científicas de la época, como:

- la acción instantánea a distancia frente al concepto de campo
- la teoría corpuscular de la luz frente a la teoría ondulatoria
- los conceptos absolutos de espacio y tiempo frente a la idea relativa de ellos
- la mecánica macroscópica frente a la mecánica microscópica

Newton defendía la acción instantánea a distancia, que luego fue abandonada a favor del concepto de campo. Defendía también la teoría corpuscular de la luz, que cedió el paso a la teoría ondulatoria de la luz, si bien luego volvió a retomarse en tiempos de Einstein. Los conceptos de espacio y tiempo absolutos de Newton son sustituidos en la teoría de Einstein por los conceptos relativos de espacio y tiempo, sobre todo para velocidades altas comparadas con la velocidad de la luz. La mecánica newtoniana fue sustituida por la mecánica cuántica cuando se trataba de estudiar el mundo de lo muy pequeño, el mundo microscópico.

(En este momento se podría resaltar el carácter dinámico de la Ciencia, en cuanto a la sustitución de unas teorías por otras a medida que se conocen los resultados de nuevos experimentos.)

3.- Según el biógrafo de Newton, Lord Keynes, ¿ qué característica se puede resaltar en cuanto a la manera de tratar los problemas de Newton?

“ el poder de Newton de mantener continuamente en su mente un problema mental, durante horas, días y semanas, hasta que le entregaba sus secretos.”

4.- Newton “no escribió ningún tratado de química aunque tal vez le dedicara más tiempo que a la física”. ¿A qué partes de la química se dedicó más?

A la alquimia y a los metales.

## VIII. DIRECCIONES DE INTERNET

1 Dinámica de rotación del punto material: conservación del momento angular.

Momento angular

[http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/applets/Hwang/ntnujava/equalArea/equalArea\\_s.htm](http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/applets/Hwang/ntnujava/equalArea/equalArea_s.htm)

2 Leyes de Kepler

[http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/applets/Hwang/ntnujava/Kepler/Kepler\\_s.htm](http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/applets/Hwang/ntnujava/Kepler/Kepler_s.htm)

3 Ley de gravitación universal

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/kepler4/kepler4.html#Actividades>

4 Conservación de la energía

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/cupula/cupula.htm>

5. Cometas y satélites. Velocidad de escape.

[http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/applets/Hwang/ntnujava/projectileOrbit/projectileOrbit\\_s.htm](http://www.edu.aytolacoruna.es/aula/fisica/applets/Hwang/ntnujava/projectileOrbit/projectileOrbit_s.htm)