

UNIDAD DIDÁCTICA: TIRO OBLICUO

INTRODUCCIÓN:

En los últimos años, las ciencias computacionales han alcanzado un alto grado de desarrollo, lo cual ha permitido la elaboración de modelos informáticos que nos ayudan a comprender el comportamiento de los fenómenos físicos que acontecen en la naturaleza. A este desarrollo se le ha unido últimamente el “boom” de Internet, que facilita la difusión del conocimiento, permitiendo que millones de personas compartan información en una sinergia investigadora y educativa.

Una simulación por ordenador es un programa que pretende reproducir con fines docentes o investigadores un fenómeno natural mediante la visualización de los diferentes estados que el mismo puede presentar, estando cada estado descrito por un conjunto de variables que varían mediante la iteración en el tiempo de un algoritmo determinado. Por esta razón, una simulación por ordenador describe de manera intuitiva el comportamiento del sistema real.

El objetivo fundamental que se pretende con este trabajo es producir un material didáctico audiovisual de calidad que, además del aprendizaje directo que supone para los alumnos que lo realizan, sea útil a futuras generaciones de estudiantes que harán uso de él tanto dentro como fuera de nuestra universidad.

Para realizar las simulaciones se utilizará, como mencionamos, el lenguaje de programación Java. Este lenguaje presenta dos ventajas principalmente:

- Es compatible con los navegadores de Internet, por lo que cualquier persona con acceso a la red puede acceder remotamente a las simulaciones en cualquier momento.
- Al utilizar la tecnología "Máquina Virtual de Java" de Sun Microsystems, perfectamente integrada en todas las plataformas actuales, las simulaciones son ejecutadas a la

perfección desde cualquier sistema operativo, desde Windows (en todas sus versiones) hasta Linux, pasando por otros de uso minoritario (como Solaris, OS/2, etc.). Asimismo, las simulaciones son totalmente compatibles con cualquier versión de MacOS para Macintosh.

Mediante este modelo se puede observar en forma dinámica la variación en el tiempo de los valores de las componentes horizontal y vertical de la velocidad y de la posición de una partícula que se desplaza en el seno de un campo gravitatorio de intensidad uniforme.

FUNDAMENTO TEÓRICO:

Si sobre una partícula de velocidad inicial $\vec{V}_0 = V_{0x}\vec{i} + V_{0y}\vec{j}$, actúa una fuerza del tipo $\vec{F} = -m\cdot g\vec{j}$, siendo g la intensidad del campo gravitatorio, las ecuaciones del movimiento de la partícula, vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$V_x(t) = V_{0x} \quad (1)$$

$$V_y(t) = V_{0y} - gt \quad (2)$$

$$X(t) = X_0 + V_{0x} \cdot t \quad (3)$$

$$Y(t) = Y_0 + V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (4)$$

Eliminando t entre las ecuaciones (3) y (4), se demuestra que la dependencia de y frente a x es también de tipo parabólico.

Para calcular el tiempo t_{\max} que tarda la partícula en alcanzar su altura máxima Y_{\max} , basta tener en cuenta que, en ese instante, se verifica que $V_y = 0$.

Por tanto, de la expresión (2) se deduce:
$$t_{\max} = \frac{V_{0y}}{g} \quad (5)$$

Por otra parte, el tiempo de vuelo t_v , transcurrido desde el comienzo del movimiento hasta que la componente vertical de la posición de la partícula

alcanza el valor 0, puede determinarse, a partir de la expresión (4), haciendo $Y(t)=0$, obteniéndose:

$$t_v = \frac{V_{0Y} + \sqrt{V_{0Y}^2 + 2gY_0}}{g} \quad (6)$$

En el caso en que la altura inicial fuera cero ($Y_0 = 0$), el tiempo de vuelo se calcularía mediante la expresión:

$$t_v = 2 \frac{V_{0Y}}{g} = 2t_{\max} \quad (7)$$

Las expresiones (5) y (7) ponen de manifiesto que, en un campo de gravitación uniforme, tanto el tiempo t_{\max} como el t_v , dependen únicamente del valor de la componente vertical de la velocidad inicial, en el caso de que $Y_0 = 0$.

Para determinar las coordenadas X_{\max} , Y_{\max} correspondientes al punto de máxima altura, se sustituye el valor $t_{\max} = V_{0Y}/g$ en las expresiones (3) y (4) respectivamente, obteniéndose:

$$Y_{\max} = Y_0 + \frac{1}{2} \frac{V_{0Y}^2}{g} \quad (8)$$

$$X_{\max} = X_0 + \frac{V_{0X} \cdot V_{0Y}}{g} = X_0 + \frac{V_0^2 \text{sen}(2\alpha)}{2g} \quad (9)$$

donde α representa el ángulo de tiro.

Las expresiones (8) y (9) ponen de manifiesto que la altura máxima alcanzada (suponiendo $Y_0 = \text{cte}$) sólo depende de V_{0Y} , mientras que la abscisa correspondiente depende tanto de V_{0Y} como de V_{0X} , o, dicho de otro modo, tanto del módulo de la velocidad inicial como del ángulo de tiro.

Finalmente, durante el tiempo de vuelo, el desplazamiento horizontal (alcance) se calcula sustituyendo el valor t_v en la expresión (3), verificándose:

$$X_{\text{alcance}} = X_0 + V_{0X} \left[\frac{V_{0Y} + \sqrt{V_{0Y}^2 + 2gY_0}}{g} \right] \quad (10)$$

Para el caso en que $Y_0 = 0$, la expresión del alcance es:

$$X_{alcance} = X_0 + 2 \frac{V_{0x} \cdot V_{0y}}{g} = X_0 + \frac{V_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} \quad (11)$$

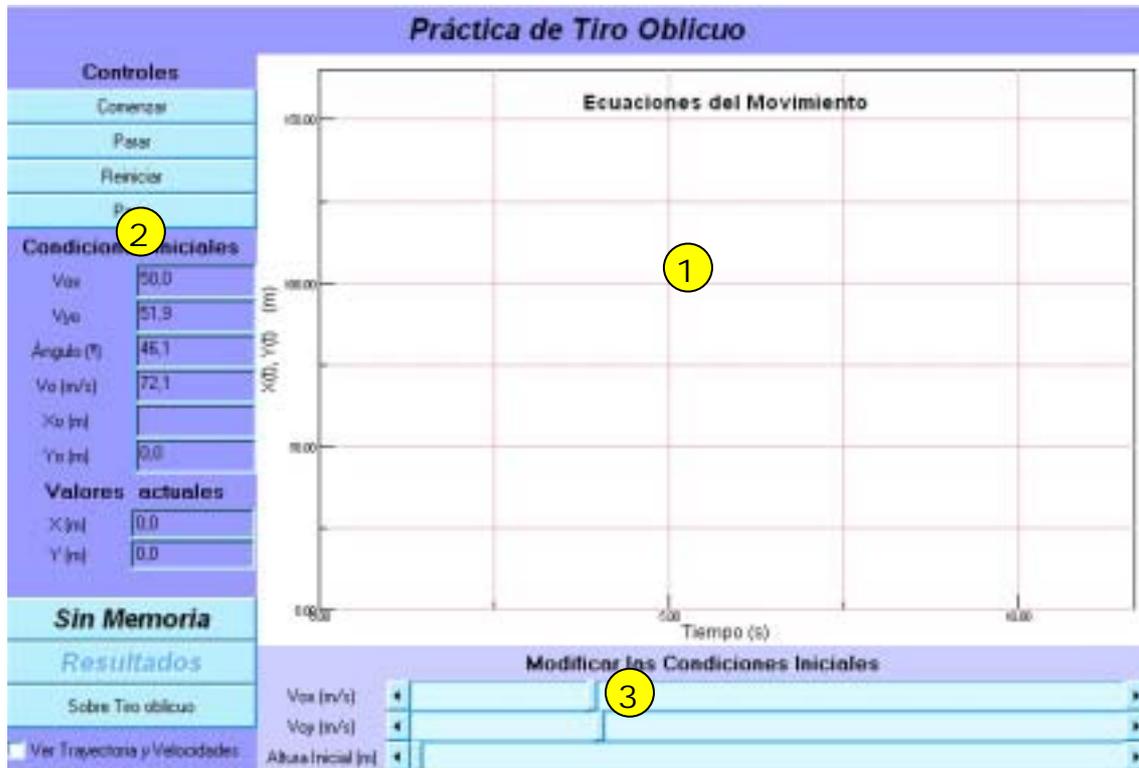
Ecuación que pone de manifiesto que, para un determinado valor del módulo de la velocidad inicial, el máximo alcance corresponde a un ángulo de tiro $\alpha = 45^\circ$.

OBJETIVOS DEL APRENDIZAJE:

1. Observar que el movimiento de una partícula que se desplaza en un campo gravitatorio equivale a la superposición de un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical uniformemente variado.
2. Estudiar la influencia de la velocidad inicial en la forma que adquiere la trayectoria de la partícula y comprobar que esta trayectoria es de tipo parabólico.
3. Determinar experimentalmente los valores del tiempo, de las componentes de la velocidad y de las componentes de la posición, asociados a los puntos más significativos de la trayectoria descrita por la partícula.
4. Calcular la relación entre los valores de las componentes de la velocidad inicial y los tiempos empleados en alcanzar la altura máxima y el alcance horizontal.
5. Determinar la relación entre las componentes de la velocidad inicial y las coordenadas correspondientes a la altura máxima y el alcance horizontal.
6. Estudiar los movimientos de tiro horizontal, caída libre y tiro vertical.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO:

La figura que se presenta a continuación nos muestra la interfaz de nuestro modelo:



A continuación describiremos cada una de las siguientes partes:

1. Gráficas de nuestra simulación:

En esta zona se representarán las distintas gráficas de la simulación.

2. Controles:

Con estos comandos ejecutaremos las acciones que nos permiten controlar la simulación. Asimismo, se muestran los distintos valores que toman los parámetros de nuestra simulación.

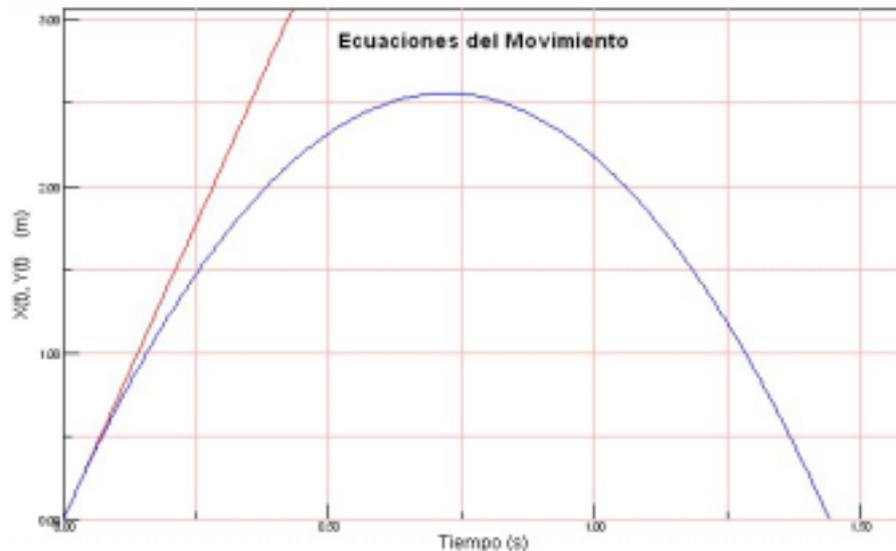
3. Condiciones Iniciales:

Aquí podemos modificar los parámetros que serán tomados como base en nuestra simulación.

Explicaremos ahora detalladamente cada una de las zonas:

Zona 1: Gráficas.

En esta región veremos las ecuaciones del movimiento $X(t)$ e $Y(t)$ de nuestra partícula:



Zona 2: Controles.

Controles	
Comenzar	
Parar	
Reiniciar	
Paso	
Condiciones Iniciales	
Vox	50,0
Vyo	51,9
Ángulo (°)	46,1
Vo (m/s)	72,1
Xo (m)	
Yo (m)	0,0
Valores actuales	
X (m)	0,0
Y (m)	0,0
Sin Memoria	
Resultados	
Sobre Tiro oblicuo	
<input type="checkbox"/>	Ver Trayectoria y Velocidades

- ← Inicia la simulación
- ← Detiene la simulación en cualquier instante.
- ← Reinicia el modelo con los parámetros por defecto.
- ← Ejecuta la simulación paso a paso (pausa virtual).
- ← V_{X0}
- ← V_{Y0}
- ← Ángulo de tiro.
- ← Velocidad inicial.
- ← Valor inicial de X.
- ← Altura inicial del tiro.
- ← Valor actual de X, en cualquier instante de la simulación.
- ← Valor actual de Y, en cualquier instante de la simulación.
- ← Nos permite borrar o no las simulaciones anteriores
- ← Abre el cuadro de dialogo con los resultados.
- ← Abre el cuadro de dialogo sobre los autores.
- ← Abre un cuadro de diálogo con la trayectoria y las velocidades de la partícula. Lo mostraremos a continuación:

Simulación en Java sobre Tiro Oblicuo

Trabajo realizado por:

Guadalupe Martínez Borreguero (*upemborre@hotmail.com*)

Francisco Luis Naranjo Correa (*zeolum@hotmail.com*)

Académicamente dirigidos por:

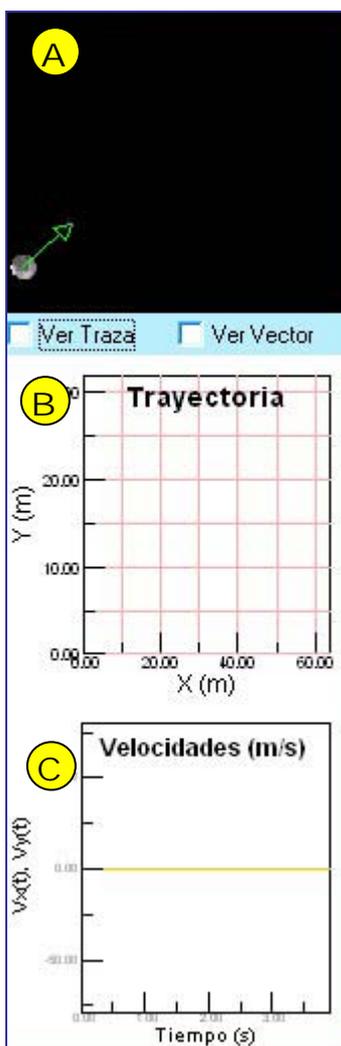
M^a Isabel Suero López

Angel Luis Pérez Rodríguez

Departamento de Física. Universidad de Extremadura

© 2002. Todos los derechos reservados

Al activar la casilla “Ver Trayectoria y Velocidades” se abre un cuadro de diálogo como el siguiente:



← En esta zona se ve cómo actuaría una piedra real al lanzarla con las condiciones iniciales que establezcamos. El vector verde indica la velocidad y ángulo inicial

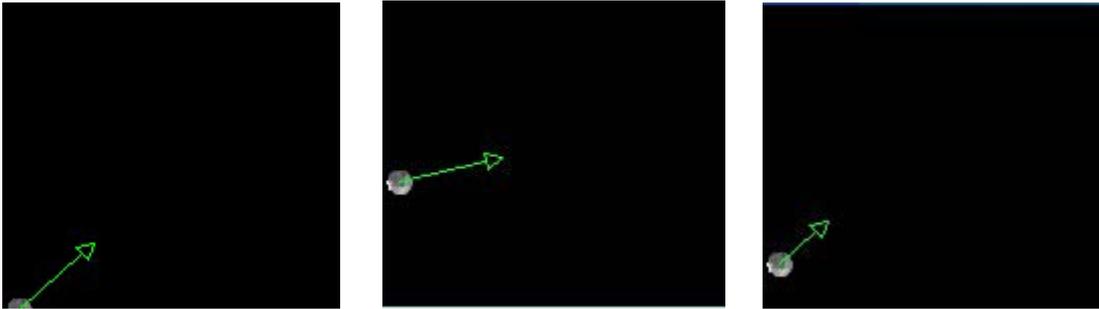
← Estas casillas las comentaremos más adelante.

← Gráfica que muestra la trayectoria de la partícula, es decir, Y frente a X.

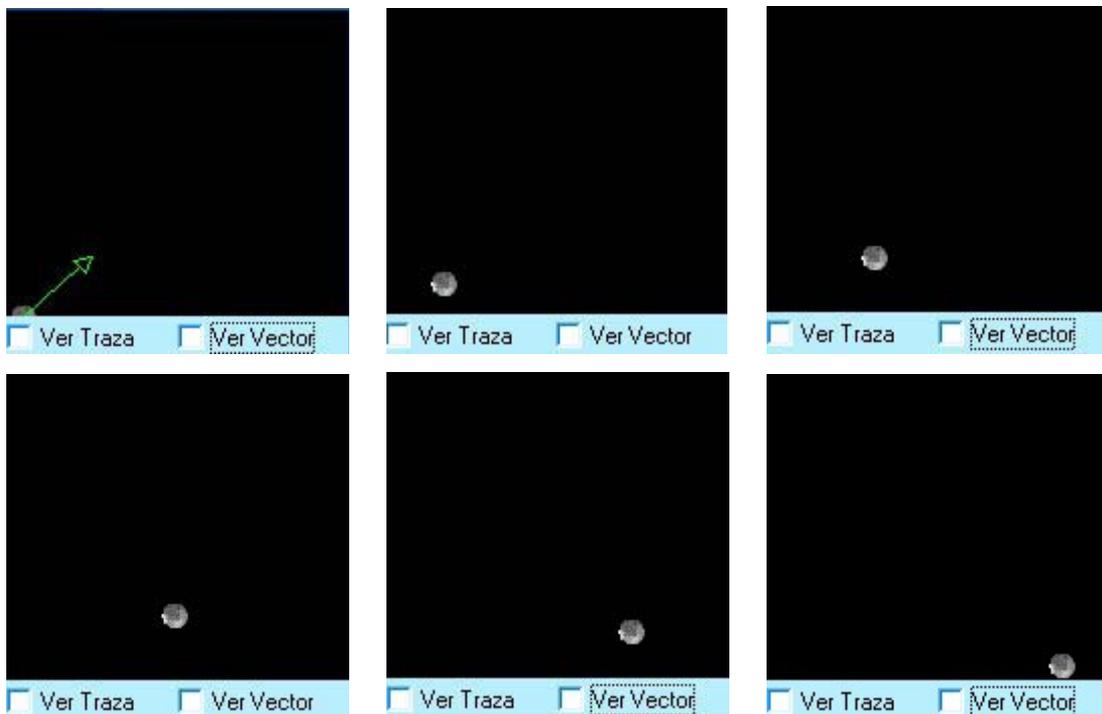
← Gráfica que nos muestra las velocidades $V(x)$ y $V(y)$ frente al tiempo. La **línea amarilla** indica el cero.

Evaluemos detenidamente las aplicaciones de este cuadro de diálogo:

A.- Un mundo “real”, donde se ve cómo actuaría una piedra al lanzarla con las condiciones iniciales que establezcamos. Al establecer las condiciones iniciales de la simulación aparece la piedra en la altura inicial con un vector verde que nos indica el ángulo de tiro y la velocidad inicial, como muestran estas imágenes:



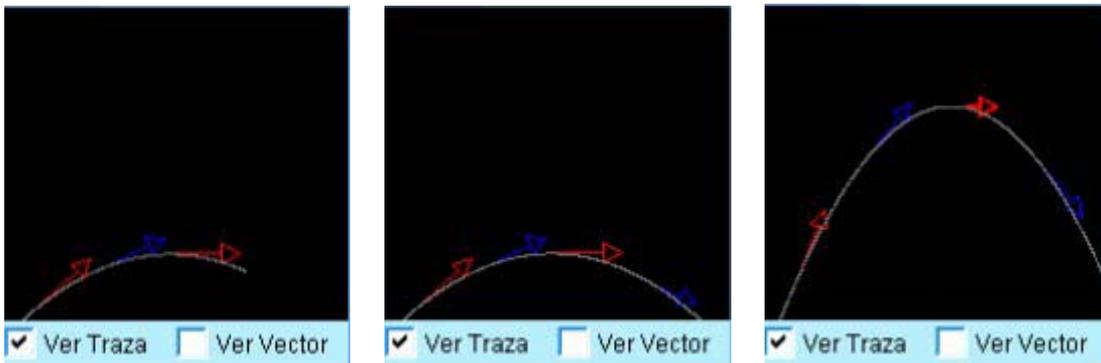
Al ejecutar la simulación el vector verde desaparece, y veremos como la piedra sigue una trayectoria parabólica, según nos muestra esta secuencia:



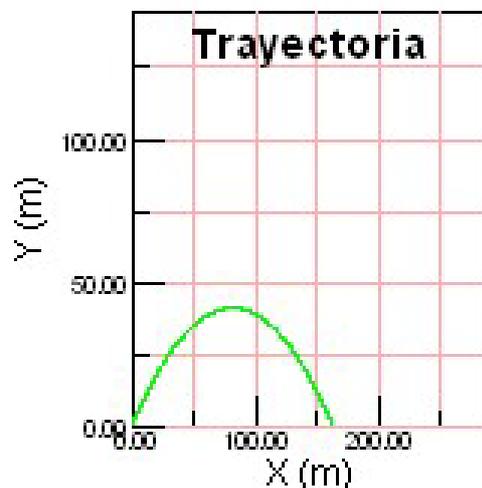
Si activamos la casilla “Ver Vector” un vector amarillo acompaña a nuestra piedra en la simulación, indicando en todo momento el módulo y la dirección de su velocidad:



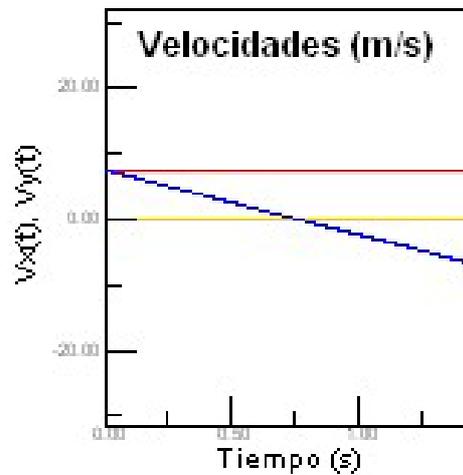
Por otro lado, al activar la casilla “Ver Trazas” nuestra piedra desaparece. Se nos muestra tan sólo la trayectoria del centro de masas de la misma, acompañada de unos cuantos vectores que indican la velocidad en algunos puntos (observe que en todo momento estos vectores son tangentes a la trayectoria):



B.- En esta gráfica muestra la trayectoria de la partícula, es decir, Y frente a X. Corresponde a lo que veríamos en la zona en la gráfica de arriba si activáramos la casilla “Ver Trazas”, solo que reescalado para que quepa en la gráfica:



C.- Por último, aquí pueden verse las velocidades frente al tiempo, tanto V_x como V_y : (la línea amarilla indica el cero).



Pasaremos a evaluar el botón “Resultados” que está en la zona de controles. Al pulsar este botón se abre un cuadro de diálogo como el siguiente:

Condiciones Iniciales	
Ángulo	50,3°
Altura Inicial	3,5 m
Velocidad Inicial	36,0 m/s
V_{ox}	22,9 m/s
V_{oy}	27,7 m/s
Altura Máxima	
Altura máxima ($Y_{máx}$)	42,6 m
Tiempo empleado en alcanzarla	2,8 s
V_x en ese punto	22,9 m/s
V_y en ese punto	0,0 m/s
Alcance	
Alcance ($X_{máx}$)	132,4 m
Tiempo empleado en alcanzarlo	5,8 s
V_x en ese punto	22,9 m/s
V_y en ese punto	-29,0 m/s

En este cuadro se nos muestran las condiciones iniciales impuestas y los parámetros relacionados con la altura máxima y el alcance.

Zona 3: Condiciones Iniciales:

Modificar las Condiciones Iniciales	
Vox (m/s)	<input type="text"/>
Voy (m/s)	<input type="text"/>
Altura Inicial (m)	<input type="text"/>

Con estas barras podemos variar las condiciones iniciales que queramos establecer.

A continuación pasaremos a describir algunas de las posibles prácticas que pueden realizarse con este modelo.

PRÁCTICA 1:

Objetivos:

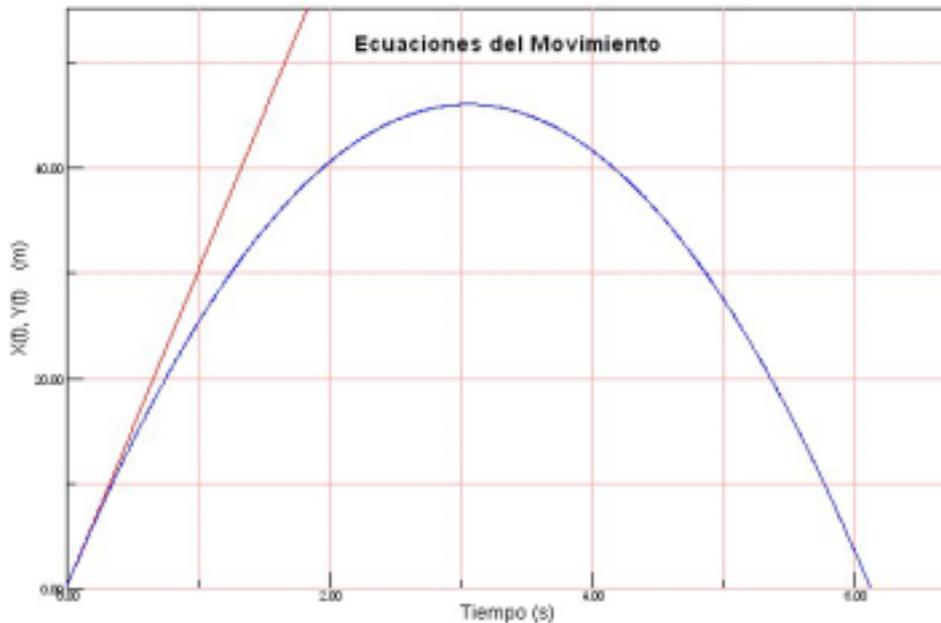
- Verificar que en un tiro parabólico el movimiento en la dirección horizontal es uniforme y en la dirección vertical es uniformemente variado.
- Observar que en el instante en el que se alcanza la altura máxima V_y es igual a cero.
- Demostrar que el valor del tiempo de vuelo es el doble al invertido en alcanzar la altura máxima.

Método Operativo:

.- Establezca las condiciones iniciales que desee, por ejemplo $V_{x0} = 30 \text{ m/s}$ y $V_{y0} = 30 \text{ m/s}$. Considere que la altura inicial de la piedra es de 0 m. El panel que debe tener es el siguiente:

Condiciones Iniciales	
Vox	30,0
Vyo	30,0
Ángulo (°)	45,0
Vo (m/s)	42,4
Xo (m)	
Yo (m)	0,0

- Ejecute la simulación presionando el botón comenzar. La gráfica que obtenga será:

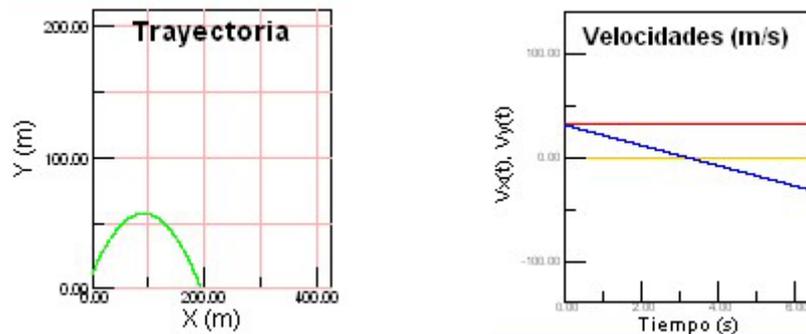


- Observe que el resultado de $X(t)$ es una recta (movimiento uniforme) y el correspondiente a $Y(t)$ una parábola (movimiento uniformemente variado).

- Mida el tiempo empleado en alcanzar la altura máxima y el empleado en alcanzar de nuevo la altura cero. Verifique que el primero es la mitad que el segundo. Para realizar este apartado puede hacer uso del botón de "Resultados".

Condiciones Iniciales	
Ángulo	45,0°
Altura Inicial	10,0 m
Velocidad Inicial	42,4 m/s
Vox	30,0 m/s
Voy	30,0 m/s
Altura Máxima	
Altura máxima (Ymáx)	55,9 m
Tiempo empleado en alcanzarla	3,1 s
Vx en ese punto	30,0 m/s
Vy en ese punto	0,0 m/s
Alcance	
Alcance (Xmáx)	192,7 m
Tiempo empleado en alcanzarlo	6,4 s
Vx en ese punto	30,0 m/s
Vy en ese punto	-33,1 m/s

.- Presione la casilla “Ver Trayectoria y Velocidades”, observe que el valor de $V_x(t)$ permanece constantemente igual a $V_x(0)$ mientras que el valor de $V_y(t)$ disminuye linealmente:



.- Observe que $Y(t)$ alcanza su valor máximo cuando $V_y(t)$ vale cero. (Puede hacer uso de la línea de referencia amarilla para evaluar el tiempo en que $V_y(t)$ se hace cero)

.- Repita la simulación para otras condiciones iniciales.

PRÁCTICA 2:

Objetivos:

- Observar que el movimiento en la dirección horizontal es independiente del valor de $V_y(0)$ y que el movimiento en la dirección vertical es independiente de V_{x0} .
- Comprobar que el tiempo de vuelo es directamente proporcional a $V_y(0)$ e independiente del valor V_{x0} .

Método Operativo:

.- Establezca como condiciones iniciales el valor de $V_{x0} = 10$ m/s y $V_{y0} = 40$ m/s.

.- Ejecute la simulación. Pulse el botón “Resultados” y anote el tiempo de vuelo.

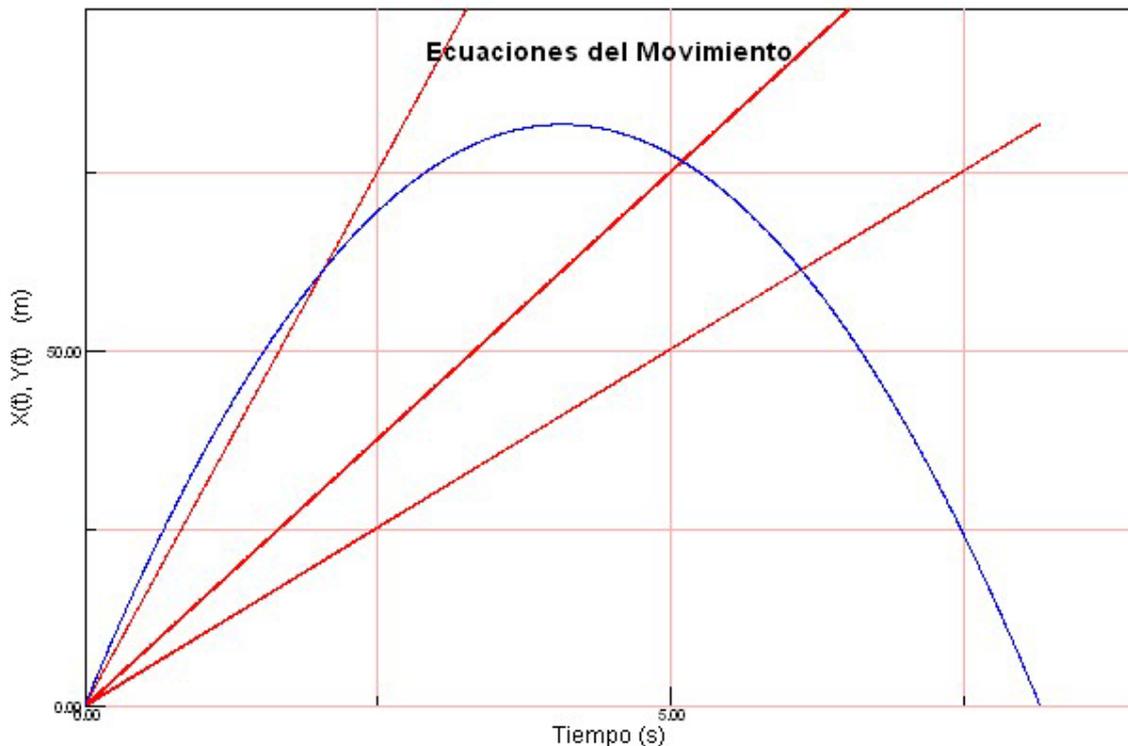
.- Pulse el botón “Sin Memoria”. Este botón le permitirá no borrar los resultados de las simulaciones previas y pasa a llamarse “Con Memoria”.

.- Cambie el valor de V_{x0} a 15 m/s y efectúe un nuevo registro. Anote de nuevo el tiempo de vuelo.

.- Observe que mientras que la traza que representa el movimiento de la **dirección horizontal** varía, la que representa el movimiento en la **dirección vertical** permanece inalterada.

.- Cambie de nuevo el valor de V_{x0} a 30 m/s y ejecute la simulación, tomando nota del tiempo de vuelo. Compruebe que el tiempo de vuelo es directamente proporcional al valor de V_{y0} .

.- La gráfica resultante debe ser como esta:



PRÁCTICA 3:

Objetivos:

- Comprobar que la altura máxima alcanzada en un tiro oblicuo es independiente de V_{x0} .
- Demostrar que el alcance en un tiro oblicuo es directamente proporcional a V_{y0} y a V_{x0} .

Método Operativo:

- .- Si ha realizado antes alguna otra práctica pulse el botón "Reiniciar".
- .- Establezca como condiciones iniciales $V_{x0} = 10$ m/s y $V_{y0} = 40$ m/s.
- .- Marque la casilla "Ver Trayectoria y Velocidades". Si es necesario, desplace el cuadro de diálogo de forma que todas las gráficas se vean cómodamente.

- Pulse el botón “Sin Memoria” para activar el modo “Con Memoria”.
- Ejecute la simulación, y vea en la gráfica de la **trayectoria** la altura máxima y el alcance. Para ver los valores exactos pulse el botón “Resultados”
- Efectúe nuevos registros variando únicamente el valor de V_{x0} .
¿Qué conclusión deduce respecto a la altura máxima alcanzada? ¿Y respecto al alcance horizontal?
- Repita toda la práctica de nuevo, pero esta vez varíe sólo el valor de V_{y0} . Mida el alcance correspondiente. ¿Cómo influye?

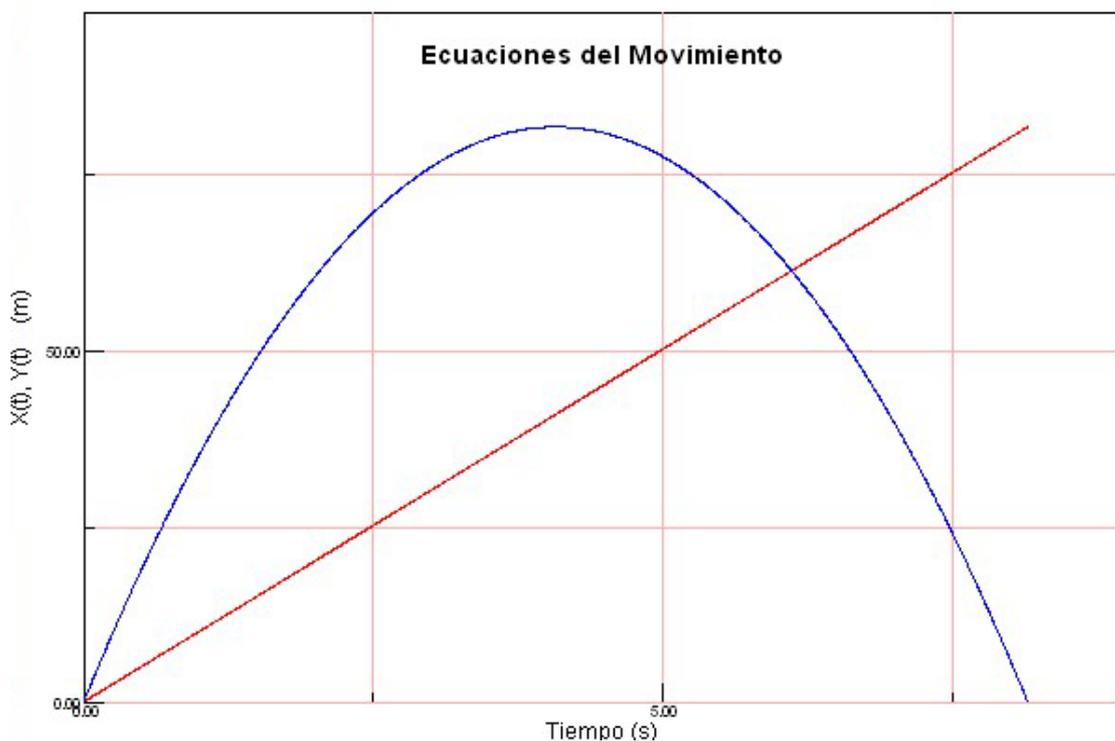
PRÁCTICA 4:

Objetivos:

- Comprobar que la altura máxima alcanzada en el tiro parabólico es directamente proporcional a $V_y^2(0)$.

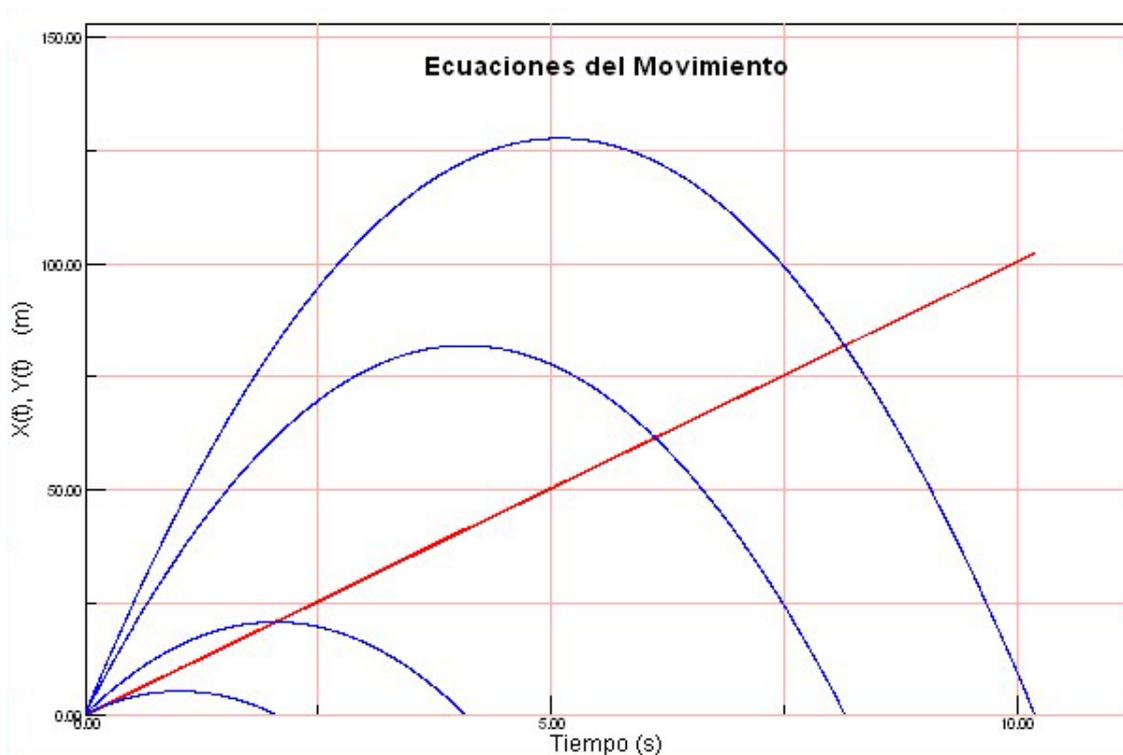
Método Operativo:

- Establezca las siguientes condiciones iniciales: $X(0) = 0$, $Y(0) = 0$, $V_x(0) = 10\text{m/s}$, y $V_y(0) = 40\text{m/s}$.
- Ejecute la simulación presionando el botón “Comenzar”. La gráfica que obtendrá será la siguiente:



- Pulse el botón “Sin Memoria” para activar el modo “Con Memoria”.
- Registre las trayectorias correspondientes a los siguientes tiros anotando los alcances horizontales y las alturas máximas alcanzadas por las partículas en cada disparo; para ello puede hacer uso del botón “Resultados”.

$X(0)$ (m)	$Y(0)$ (m)	$V_x(0)$ (m/s)	$V_y(0)$ (m/s)
0	0	10	10
0	0	10	20
0	0	10	40
0	0	10	50



- ¿Cómo influye el valor de $V_y(0)$ en la altura máxima?
- Observe que la gráfica correspondiente a $X(t)$ es una recta y la de $Y(t)$ es una parábola.
- Mida el tiempo empleado en alcanzar la altura máxima y el empleado en pasar de nuevo por la altura cero, Verifique que el primero es la mitad del segundo.

PRÁCTICA 5:

Objetivos:

- Analizar la trayectoria descrita por la partícula en los siguientes casos:
 - a) Tiro horizontal.
 - b) Tiro vertical.
 - c) Caída libre.

Método Operativo:

a) TIRO HORIZONTAL:

- Tome los siguientes valores iniciales: $X(0) = 0$, $Y(0) = 15$, $V_x(0) = 40$ m/s. ¿Qué valor debe asignar a $V_y(0)$ para que la trayectoria observada corresponda a un tiro horizontal?. Seleccione para $V_y(0)$ el valor asignado.

- Ejecute la simulación con los valores anteriores y evalúe la trayectoria de la partícula. ¿Corresponde a la de un tiro horizontal? Si no es así repita el paso anterior.

- El resultado obtenido debe ser :



b) TIRO VERTICAL:

- Asigne los valores $X(0) = 0$, $Y(0) = 0$, $V_Y(0) = 40$ m/s. ¿Qué valor debe tomar $V_X(0)$ para que la trayectoria descrita por la partícula represente un tiro vertical ?

- Seleccione para $V_X(0)$ el valor asignado.

- Ejecute la simulación con los valores anteriores y evalúe la trayectoria de la partícula. ¿Corresponde a la de un tiro vertical? Si no es así repita el paso anterior.

- La gráfica obtenida ha de ser la siguiente:



c) CAÍDA LIBRE:

- Seleccione como condiciones iniciales aquellas que le permitan observar la caída libre de una partícula desde 50 m de altura.

- Realice el registro correspondiente y compruebe si la elección de las condiciones iniciales ha sido correcta.

- Repita el ejercicio para distintos valores de las condiciones iniciales.

Práctica de Tiro Oblicuo

Controles

Comenzar
Pausa
Reiniciar
Salir

Condiciones Iniciales

V_{0x} (m/s) 0.0
V_{0y} (m/s) 0.0
Ángulo (°) 0
V₀ (m/s) 0.0
X₀ (m) 0.0
Y₀ (m) 50.0

Valores actuales

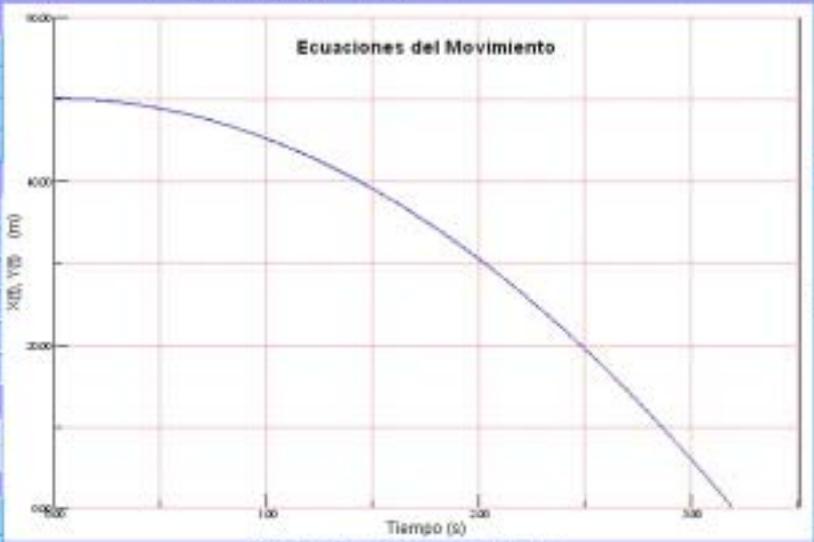
X (m) 0.0
Y (m) 0.0

Sin Memoria

Resultados

Sobre Tiro oblicuo

Ver Trayectoria y Velocidades



Modificar las Condiciones Iniciales

V_{0x} (m/s) [input] [input]
V_{0y} (m/s) [input] [input]
Altura Inicial (m) [input] [input]

Ver Traza Ver Vector

Trayectoria

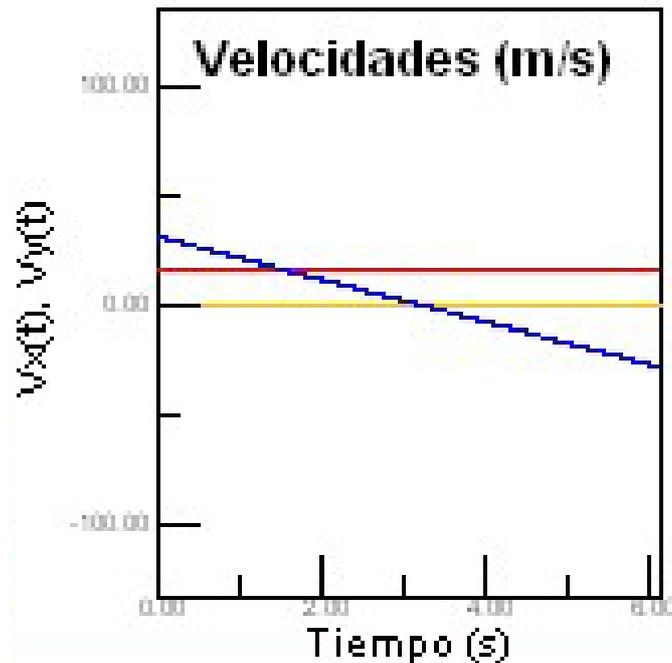
Velocidades (m/s)

Este panel contiene dos gráficos. El superior, 'Trayectoria', muestra la posición X (m) vs Y (m) con una curva parabólica. El inferior, 'Velocidades (m/s)', muestra la evolución de las componentes de velocidad V_x y V_y en función del tiempo. V_x es una línea horizontal constante, mientras que V_y es una línea recta con pendiente negativa.

EVALUACIÓN:

A continuación se reproducen algunas gráficas que se han obtenido haciendo uso del modelo descrito.

La siguiente figura corresponde a las variaciones a la largo del tiempo de las componentes vertical y horizontal de la velocidad de una partícula que se mueve en el seno del campo gravitatorio.



A la vista de este registro conteste a las siguientes preguntas:

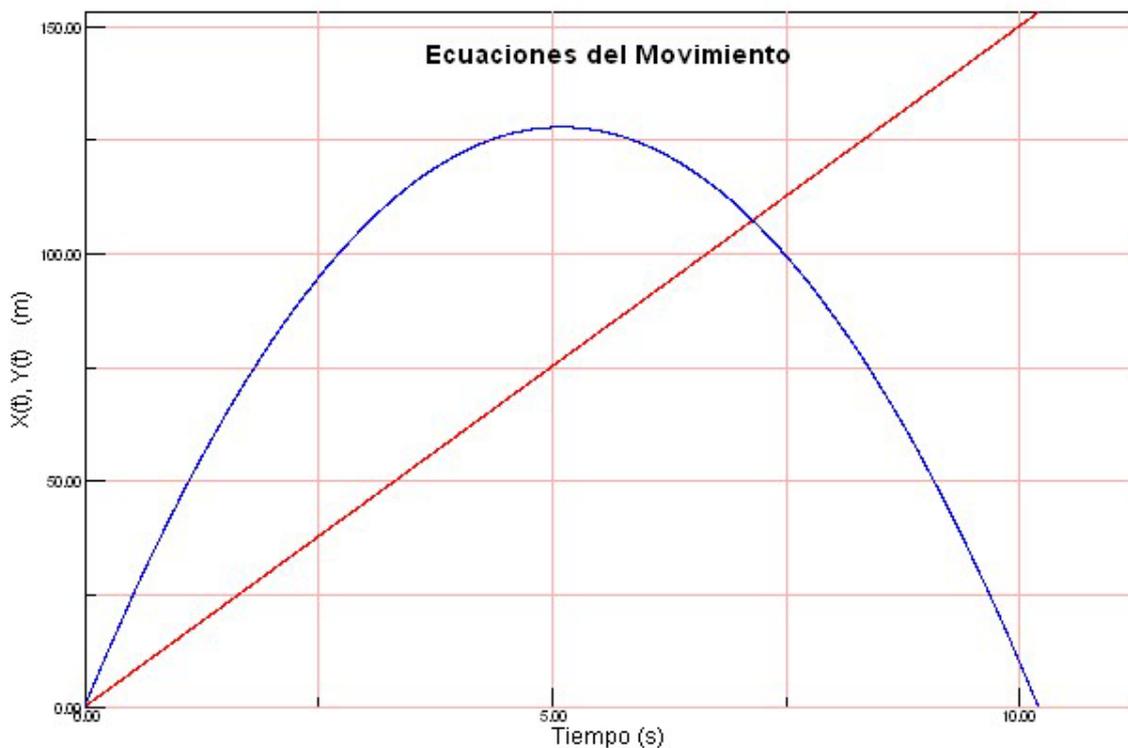
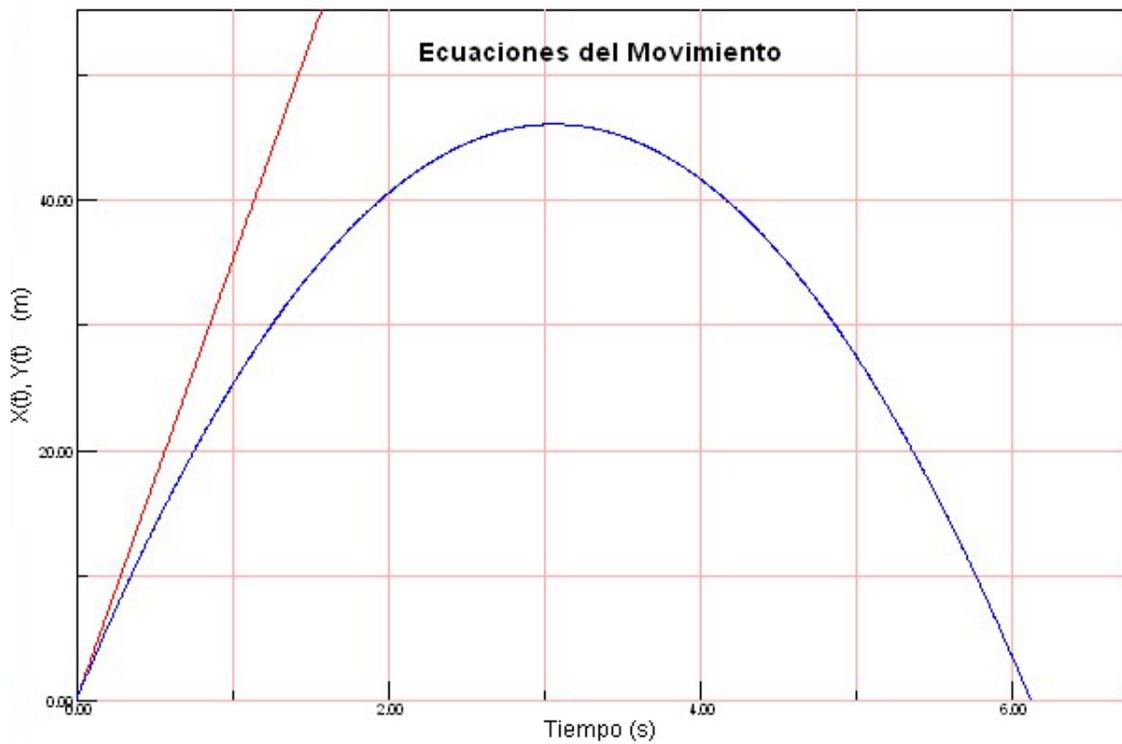
- ¿Qué tipo de movimiento tiene la partícula?
- Diga si la aceleración del móvil tiene componente horizontal.
- Calcule el tiempo que tarda en hacerse nula la componente vertical de la velocidad.
- Trascurridos dos segundos desde el disparo, diga si el ángulo que forma el vector velocidad con la horizontal es mayor o menor que 45° y razone el porqué.
- ¿En qué instante forma el vector velocidad un ángulo de 45° con la horizontal?
- Expresé matemáticamente las relaciones entre las componentes vertical y horizontal de la velocidad con el tiempo.

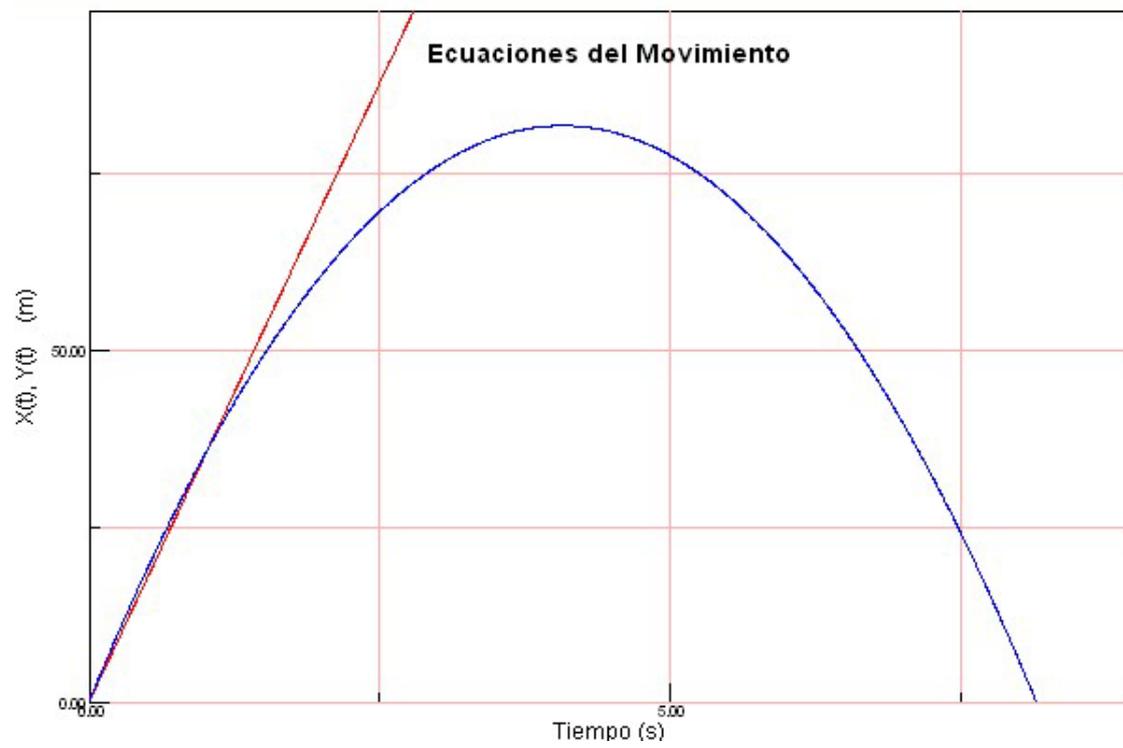
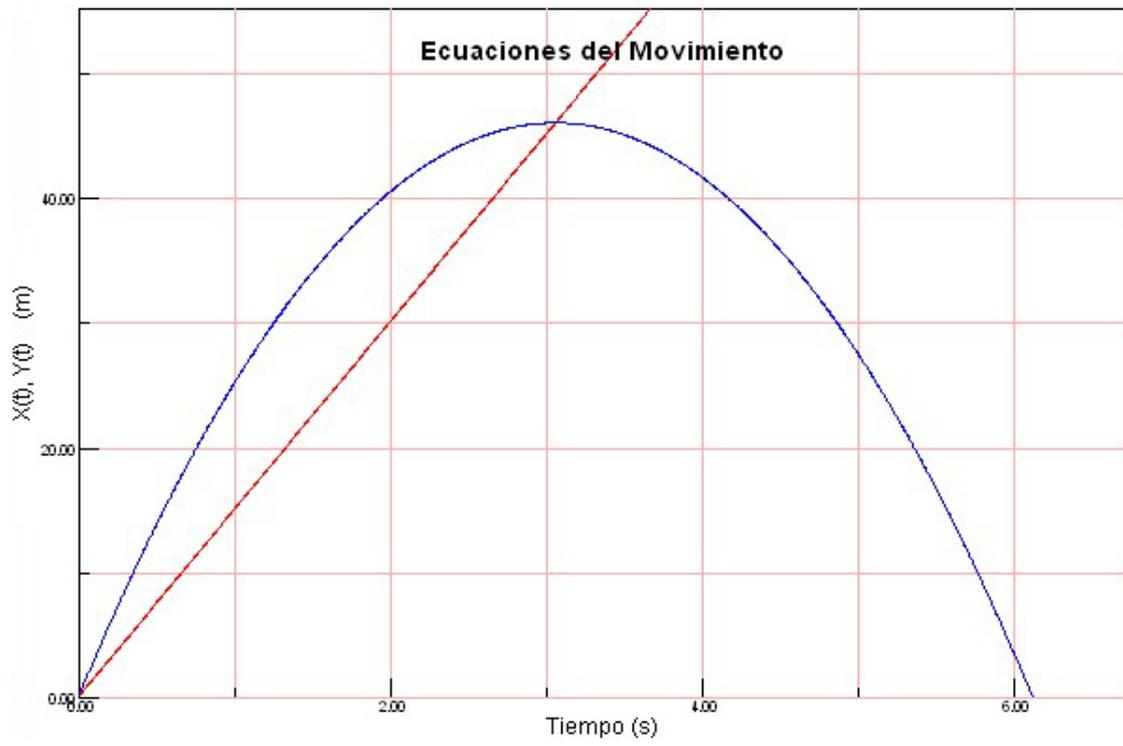
$$V_y(t) = ?$$

$$V_x(t) = ?$$

Las siguientes cuatro figuras corresponden a registros $Y(t)$ y $X(t)$ para un móvil que se desplaza en el campo gravitatorio. Razone cuál de ellos se ha obtenido con los mismos valores iniciales que el de la figura anterior.

Una vez identificada nuestra figura, diga qué condiciones iniciales y en qué sentido se han modificado en las otras tres figuras.





Por último, interprete los pares de gráficas que se presentan a continuación:

